Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

EUCLIDES

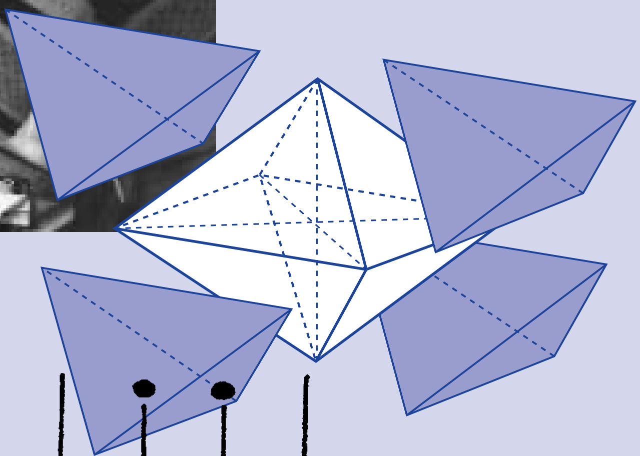
Vakblad voor de wiskundeleraar

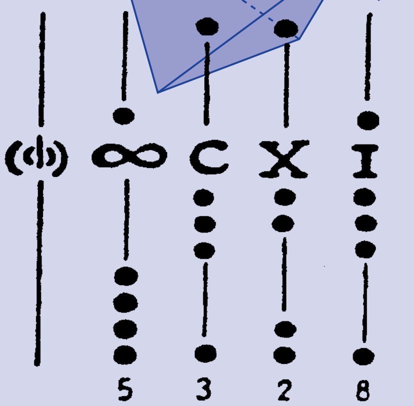
jaargang 72

1996-1997 april

7







EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem.

Richtlijnen voor aanlevering:
- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP of ASCII
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nadere richtlijnen worden op verzoek toegezonden.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter
dr. J. van Lint
Spiekerbrink 25
8034 RA Zwolle
tel. 038-4539985
Secretaris
W. Kuipers
Burg. Bijleveldsingel 38
8052 AP Hattem
tel. 038-4447017
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19
8251 LB Dronten
tel. 0321-312543

Contributie per ver. jaar: ƒ70,00
Studentleden: ƒ47,50
Leden van de VVWL: ƒ50,00
Lidmaatschap zonder Euclides: ƒ50,00
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: ƒ80,00 per jaar. Voor instituten en scholen: ƒ240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor ƒ20,00.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
C. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4
7061 WR Terborg, tel. 0315-324337
of naar:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordecht, tel. 078-6390890
fax 078-6390891.

Adresgegevens auteurs

D.J. Beckers
Merelstraat 16
6542 WJ Nijmegen

R. Bosch
Heiakker 16
4841 CR Prinsenbeek

L. van den Broek
Graafseweg 387
6532 ZN Nijmegen

C.B. Hofstra
R. Pollemaplein 1
8802 RT Franeker

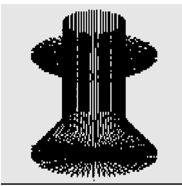
M.C. van Hoorn
Noordersingel 12
9901 BP Appingedam

J. Smit
Houtsniplaan 31
1873 JT Groet

Inhoud



269



278



284

van de redactietafel

De examens naderen. Na de meivakantie breekt het circus weer los. Hoe zal het gaan bij vbo/mavo C/D? Hoeveel scholen voor vbo zullen overgestapt zijn op het vbo-B examen nieuwe stijl? Hoe zal wiskunde B voor het vwo dit jaar uitpakken?
Het eerste nummer van de nieuwe jaargang zal grotendeels gewijd zijn aan de examens van dit schooljaar.

vbo/mavo

Het eerste landelijke eindexamen vbo/mavo C/D volgens het nieuwe examenprogramma zal worden afgenomen. Voor de meeste docenten waarschijnlijk een spannende aangelegenheid. Hoe zal het examen er uitzien en hoe zullen de leerlingen er op presteren?
Het nakijken van dit examen zal in ieder geval een veel forsere klus worden dan voorheen. Ook het beoordelen van de antwoorden van de leerlingen aan de hand van het correctievoorschrift zal lastiger en minder eenduidig uit te voeren zijn dan in voorgaande jaren. De ruimte voor interpretaties van de normering zal door het soort vraagstellingen groter zijn.
Te verwachten is dan ook dat de discussies met tweede correctoren regelmatig misschien wel behoorlijk lastig kunnen worden. Aan de andere kant is natuurlijk ook te verwachten dat vakgenoten die allemaal voor het eerst met zo'n nieuwe situatie worden geconfronteerd elkaar niet het vel over de oren zullen halen.
Speciaal aanbevolen daarom ook zijn de door de Vereniging georganiseerde examenbesprekingen. Voor vbo/mavo zijn sessies van drie uur gepland, waarin gemeenschappelijk een nadere afbakening van de normen bediscussieerd kan worden.
Op bladzijde 275 staan de lokaties. Een bezoek daaraan kan u wellicht sterken in uw discussies met tweede correctoren.

havo/vwo

Verderop in dit nummer een artikel met een overzicht van de laatste stand van zaken rond de vernieuwde Tweede Fase. Het gaat natuurlijk met name over de plaats van wiskunde in die plannen. Dat artikel is geschreven op 2 april. Op dat moment was duidelijk dat het Inrichtingsbesluit (concept-wet) vooral voor de plaats van wiskunde in de profielen toch weer andere informatie gaf dan de recent verschenen SLO-brochure.
Als u dit leest zal het inmiddels begin mei zijn. De plannen zullen dan al in de Tweede Kamer besproken zijn. Als zulke plannen in de fase van politieke besluitvorming komen, circuleren er bijna wekelijks nieuwe geruchten over mogelijke veranderingen.
De laatste twee geruchten over wiskunde zal ik u niet onthouden. Mogelijkerwijs gaat de wiskunde uit het gemeenschappelijk deel van het vwo terug van 280 naar 200 uur. En mogelijkerwijs zal wiskunde A toch een verplicht vak worden voor Cultuur en Maatschappij vwo. Zodra er zaken definitief bekend zijn zult u het kunnen lezen in Euclides.
Intussen zijn er al scholen aan het experimenteren met nieuwe inhouden én met de grafische rekenmachine. Een impressie daarvan in het artikel van Cor Hofstra, één van de docenten die meedoen aan het APS-Profi-project.

Ten slotte

De redactie wenst alle leden en alle lezers van Euclides de komende weken veel sterkte en succes met de examens.
Verder is de redactie zeer geïnteresseerd in praktijkverhalen en meningen over de examens. Pak uw pen en stel uw collega's via Euclides daarvan op de hoogte.

Kees Hoogland

Historia Magistra Vitae
De geschiedenis als inspiratiebron voor een rekenles

D.J. Beckers

Inleiding

In het wiskundeonderwijs aan het voortgezet onderwijs wordt tegenwoordig meer aandacht besteed aan de geschiedenis van de wiskunde. De uitgevers van lesmethoden springen handig op deze ontwikkeling in door historische anekdotes in hun boeken op te nemen. Dit stukje zal er hopelijk toe bijdragen u ervan te overtuigen dat de geschiedenis van de wiskunde in het onderwijs ook een meer serieuze didactische functie kan vervullen.
Het is nadrukkelijk niet mijn bedoeling te pleiten voor een implementatie van historische ontwikkelingen binnen het onderwijs. Ook wil ik benadrukken dat ik niet van plan ben enige analogie te herkennen tussen het didactische leerproces van jonge mensen en de historische ontwikkeling van het getalstelsel (of willekeurig welk historisch proces dan ook): het lijkt mij niet nuttig om een min of meer geselecteerde historische ontwikkeling — waaruit bijvoorbeeld alle 'doodlopende sporen' zijn weggewerkt — in het klaslokaal na te spelen. De keuze van mijn titel moge iets dergelijks suggereren; het woordje 'inspiratiebron' in de ondertitel verdient wat mij betreft echter de nadruk: de geschiedenis dus om inspiratie uit te putten; niet om **van** te leren, maar om **uit** te leren.

De Romeinen

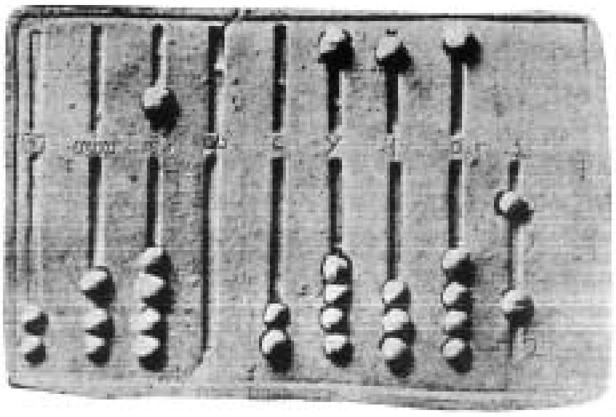
De manier waarop de Romeinen rekenden lijkt heel erg op de manier waarop leerlingen op de basisschool tegenwoordig kennis maken met het rekenen. In een brugklas kan een les over het rekenen met Romeinse getallen dus twee doelen hebben. Enerzijds verdiepen de leerlingen zich in een interessant stukje geschiedenis van de wiskunde, waaruit zij hopelijk oppikken dat het vak een lange ontwikkeling heeft doorgemaakt die voor hen (althans gedeeltelijk) begrijpelijk is, en die het vooroordeel dat wiskunde alleen voor briljante geesten is kan helpen wegnemen. Anderzijds brengen de Romeinse cijfers hen opnieuw in contact met elementaire rekenkundige technieken en denkwijzen: aansluitend op het rekenonderwijs aan de basisschool kunnen ze via de Romeinse cijfers een stukje verder leren. Wanneer de leerlingen hier een werkstukje over maken kan het onderwerp tevens een aardige invulling zijn van GWA.

De geschiedkundige inspiratiebron

Mensen leerden al vroeg tellen. Gedurende het vroege Neolithicum werden bijvoorbeeld kudden op transport voorzien van een verzegelde zak met daarin evenveel klei-figuurtjes als de kudde dieren telde: op deze wijze was de ontvanger in staat te controleren of alles was aangekomen dat hem was toegestuurd. In Mesapotamië bestond al in het derde millennium vóór Christus een 60-tallig positiestelsel om getallen te kunnen weergeven. Dit systeem was reeds nauw verwant aan hetgeen wij heden ten dage gebruiken, ware het niet dat men geen symbool had voor nul — men liet gewoon een positie open — en dat men de getallen die de

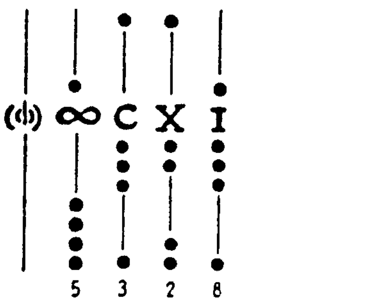
machten van zestig moesten aangeven opbouwde uit een op het tientallig stelsel gebaseerd tekensysteem zoals later ook de Romeinen dat kenden.
Het Romeinse getalstelsel en de Romeinse manier van rekenen zijn makkelijker om te leren rekenen dan de Mesapotamische wijze. Niet alleen omdat de Mesapotamiërs zestig tafeltjes uit hun hoofd moesten leren alvorens ze konden gaan vermenigvuldigen, maar ook en vooral omdat het Romeinse stelsel qua opzet veel primitiever is dan het Mesapotamische stelsel. De manier van rekenen en tellen in het oude Egypte leek erg op het Romeinse, en was op punten zelfs verder ontwikkeld. Kinderen spreekt het Romeinse getalstelsel echter meer aan: de romeinse cijfers herkennen ze, en vaak weten ze hoe hun stad of dorp in de Romeinse tijd heette. Kortom: de Romeinse wereld staat in cultureel opzicht dichter bij de kinderen van vandaag dan de Egyptische.

De getallen



Romeinse abacus

Om getallen te kunnen weergeven gebruikten de Romeinen de tekens I voor 1, X voor 10, C voor 100, (I) voor 1000 etc. en een samenstelling van deze tekens om ieder willekeurig getal te kunnen weergeven. De M voor 1000 getuigt van een Griekse invloed in de vroege Middeleeuwen. Tekens als V voor vijf, L voor vijftig enz. zijn eveneens latere vindingen. Zij komen voort uit het



Het getal 5328 op de Romeinse abacus

rekenen op de abacus. Omdat de antiek-Romeinse abacus bestond uit een bord met kraaltjes, die daar naar believen bijgelegd of afgenomen konden worden, vond men het blijkbaar praktisch om het aantal kraaltjes enigszins te beperken. Vandaar dat men wel een lijn trok met daaronder vier holletjes waar een kraal inpaste, en daarboven één. Wanneer het vijftal vol raakte dan nam men de vier kraaltjes onder de lijn weg, en legde men daarvoor in de plaats de ene kraal boven de lijn neer. Plaats voor een tweede kraaltje was er niet, want twee kraaltjes boven de lijn representeerde toch één kraal in de volgende rij.
Het Romeinse cijferstelsel was puur additief: III stelt 3 voor; XII is 12. Om de getallen herkenbaar te houden werden de tekens op een overzichtelijke wijze gegroepeerd. CCCX$\begin{smallmatrix}\text{IIII}\\ \text{IIIII}\end{smallmatrix}$ is 319. Het gebruik van IV voor vier of IX voor negen is een middeleeuwse truc om niet zo veel te hoeven beitelen.
Het Romeinse getalstelsel is in wezen een veredelde vorm van turven. Onze bewerking ‘optellen’ is in dit stelsel eenvoudigweg het bijeenvoegen van I-en, X-en etc.:

$$\left.\begin{matrix}\text{IIII}\\ \text{III}\end{matrix}\right\}\ \begin{matrix}\text{III}\\ \text{IIII}\end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix}\text{XIII}\\ \text{XXI}\end{matrix}\right\}\ \text{XXXIIII}$$

Als we tijdens de optelling tien I-en krijgen dan kunnen we die natuurlijk inwisselen tegen één X; tien X-en worden één C enzovoort.
Dit volgt uit de betekenis van de symbolen. Dus 72 + 44:

$$\left.\begin{matrix}\begin{smallmatrix}\text{XXX}\\ \text{XXXX}\end{smallmatrix}\text{II}\\ \\ \text{XXXXIIII}\end{matrix}\right\}\ \begin{smallmatrix}\text{XXXXX}\\ \text{XXXXX}\end{smallmatrix}\text{X}\begin{smallmatrix}\text{III}\\ \text{III}\end{smallmatrix} \rightarrow \text{CX}\begin{smallmatrix}\text{III}\\ \text{III}\end{smallmatrix}$$

116 dus. Of, nog een paar stapjes ingewikkelder 887 + 389:

$$\left.\begin{matrix}\text{CCCCXXXX III}\\ \text{CCCCXXXXIIII}\\ \\ \text{CCC}\begin{smallmatrix}\text{XXXX IIII}\\ \text{XXXXIIIII}\end{smallmatrix}\end{matrix}\right\}\ \begin{smallmatrix}\text{CCCCC}\\ \text{CCCCC}\end{smallmatrix}\text{C}\begin{smallmatrix}\text{XXXXX XXX IIIII III}\\ \text{XXXXX XXX IIIII III}\end{smallmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{smallmatrix}\text{CCCCC}\\ \text{CCCCC}\end{smallmatrix}\text{C}\begin{smallmatrix}\text{XXXXX XXX III}\\ \text{XXXXXXXXXIII}\end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix}\text{CCCCC}\\ \text{CCCCC}\end{smallmatrix}\text{CC}\begin{smallmatrix}\text{XXX III}\\ \text{XXXXIII}\end{smallmatrix} \rightarrow$$

$$\text{MCC}\begin{smallmatrix}\text{XXX III}\\ \text{XXXXIII}\end{smallmatrix}$$

Ofwel 1276. Merk op dat het concept ‘optellen’ in deze manier van rekenen in feite is teruggebracht tot het begrip ‘erbij doen’ dat op de basisschool gehanteerd wordt. Bovendien zijn de I-en en X-en gemakkelijk aan het tellen op de vingers te koppelen.

Al deze opgaven zijn terug te voeren op de koopmansrekenkunde. In de handel komt men ook vaak tegen dat men hetzelfde getal een aantal malen moet optellen, bijvoorbeeld wanneer men de prijs wil uitrekenen van zeven stuks van een bepaald product. Dit probleem, dat we tegenwoordig vermenigvuldigen noemen, werd door de Romeinen opgelost door middel van de operaties *duplatio* en optelling.

Duplatio

Duplatio betekent letterlijk verdubbeling. Verdubbeling van getallen in Romeinse cijfers is heel eenvoudig: elke I, elke X, elke C et cetera schrijf je gewoon twee keer op. Nadat eventueel tien keer voorkomende tekens zijn weggewerkt staat er het verdubbelde getal. Door de *duplatio* herhaald toe te passen op het getal dat opgeteld moest worden verkreeg men een rij van 1,2,4,8,16, … 'maal' dat getal. Uit deze rij stelde men vervolgens het 'vermenigvuldigtal' samen, telde de bijbehorende 'producten' bij elkaar op, en volgens de distributieve wet kreeg men op deze wijze de verlangde uitkomst. Bijvoorbeeld 18 × 23. Links staat het nummer van de verdubbelingsstap, rechts het steeds verdubbelde getal.

I	XXIII	
II	XXXX III III	✓
IIII	XXXX XXXXX II	
IIII IIII	C XXXX XXXX IIII	
X III III	CCC XXX IIII XXX IIII	✓

Aangezien II en X III III samen de gevraagde X IIII IIII maken, kunnen we de verlangde optelling maken door de twee getallen bij de merktekens op te tellen. Dat levert:

→ { XXXX III III ; CCC XXX IIII XXX IIII } CCC XXXXXIIIII XXXXXIIIII IIII → CCCCXIIII

Worden de getallen veel groter dan is een eenvoudig alternatief de vermenigvuldiging met X (of met C): alle eentjes worden dan immers X-en (C-en), alle X-en worden C-en (M-en) et cetera. Nog een voorbeeld om dit te illustreren; het getal 17, 125 keer opgeteld (tegenwoordig 17 maal 125):

I	X III IIII	✓	(A)
II	XXX IIII		(B)
IIII	XXX IIII XXX IIII	✓	
XX	CCC XXXX [1]	✓	
C	M CCC CCCC [2]	✓	

1) Verkregen door regel (B) met X te vermenigvuldigen
2) Verkregen door regel (A) met C te vermenigvuldigen

→ { X III IIII ; XXX IIII XXX IIII ; CCC XXXX ; M CCC CCCC } M CCCCC XXXXX CCCCC XXXXX X IIIII II IIIII III → MMCXX II III

De operatie *duplatio* is tot diep in de zestiende eeuw in Nederlandse rekenboekjes aan te treffen. Hierbij dient te worden aangetekend dat het woord 'vermenigvuldigen' voor zover het betrekking heeft op de Romeinse tijd een anachronisme is. Tot in de moderne tijd werd er verdubbeld en opgeteld, waarbij verdubbelen in termen van optellen, en niet in termen van vermenigvuldiging met twee werd opgevat. Deze methode van verdubbelen zie je ook weer terug in de realistische reken-wiskunde boeken voor de basisschool.

Gebruik in de les

Het Romeinse Rijk is voor kinderen een enorm intrigerend stukje geschiedenis. Tijdens lessen in een eerste klas voortgezet onderwijs heb ik gemerkt dat bijna elk kind wel iets wist bij te dragen tot de geschiedenis van het antieke Rome: de meesten in elk geval kenden de Romeinse naam van een (geboorte-) dorp of stad. Op deze manier betekende een herintroductie van het getalstelsel in een historische context voor deze kinderen sowieso al een aandachtsstimulans. Deze aandachttrekker is waar het betreffende de geschiedenis in het onderwijs meestal bij blijft.
Het feit dat ieder getal te schrijven is als een rij van streepjes vormt de grondslag van het rekenen. Ons getalstelsel is een ingewikkelde abstractie wanneer men het met 't basale turven vergelijkt. De Romeinse manier van rekenen is een tussenstap. Het idee om tien streepjes te vervangen door een X, tien X-en door een C enzovoorts, is geen grote stap wanneer men kinderen een paar maal grote aantallen heeft laten tellen en opschrijven. Bovendien vormt het de grondslag voor het '*1 onthouden*' wanneer men optelt met onze getallen.

Waar zit de fout?

Partieel integreren

$$\int \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}\ln x$$

$$= 1 - \int \ln x\,\mathrm{d}\frac{1}{\ln x}$$

$$= 1 + \int \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}\,x$$

En dus is $0 = 1$.

Juist het bedenken welke verdubbelingen precies het vermenigvuldigtal maken is een aardige oefening die een link heeft naar de binaire schrijfwijze. Aan de hand van het werkblad*) kunnen leerlingen oefenen, en vervolgens een werkstukje maken in het kader van GWA. Als opdracht voor zo een werkstukje valt bijvoorbeeld te denken aan het schrijven van een handleiding (de rekenregels) voor een zelf ontworpen getalstelsel.
Een bezinning op het tientallig stelsel en de manier waarop wij daarin rekenen kan op de geschetste wijze tot nieuw inzicht leiden. Zo een reflectie is met name nuttig voor leerlingen in de eerste klas van het voortgezet onderwijs, van wie verlangd wordt dat zij in de wiskundelessen buiten de paden van het rekenen naar algemene wetmatigheden gaan kijken. Door deze leerlingen op een aangename wijze te laten reflecteren op het rekenen kunnen zij veel van die wetmatigheden eenvoudig zelf onder woorden brengen en ‘bewijzen’; daarmee zou didactisch winst zijn geboekt.

Literatuur

1 *Peter Damerow und Wolfgang Lefèvre (hrsgbr), Rechenstein,* **Experiment, Sprache: Historische Fallstudien zur Entstehung der exakten Wissenschaften**, Stuttgart (1981)

2 *Fred Goffree*, **Wiskunde en didactiek**, 3 delen, Groningen (1982-1985)

3 *Morris Kline*, **Mathematics in Western Culture**, Oxford (1953, 1982[6])

4 *John McLeish*, **Het getal: van kleitablet tot computer**, Amsterdam (1993). Oorspronkelijke titel: Number; stamt van 1991

5 *J.M. Pullan*, T**he history of the abacus**, Londen (1968)

6 *Dirk Jan Struik*, **Tellen met en zonder cijfers**, Groningen (1971). Dit is nummer 6 in de Torusreeks.

7 *Dirk Jan Struik*, **Geschiedenis van de wiskunde**, Amsterdam (1965, 1977[2], 1980[3], 1990[4])

8 *B.L. van der Waerden*, **Science awakening**, Amsterdam (1954)

9 *H. Wußing*, **Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik**, Berlin (1989). Dit is Band 13 in de serie Mathematik für Lehrer.

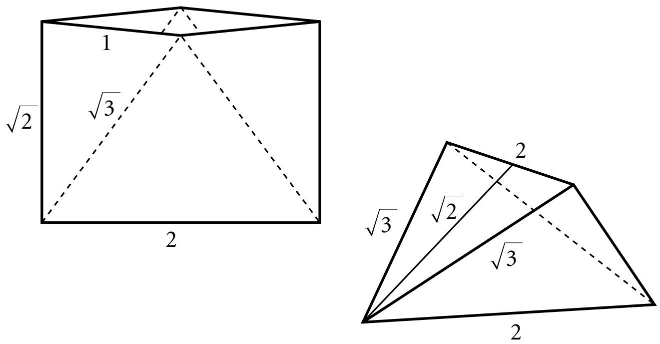
Noot

* Het werkblad vindt u op de pagina’s 288 en 289 in dit nummer.

Envelop met inhoud (3)

Jan Smit, Leon van den Broek

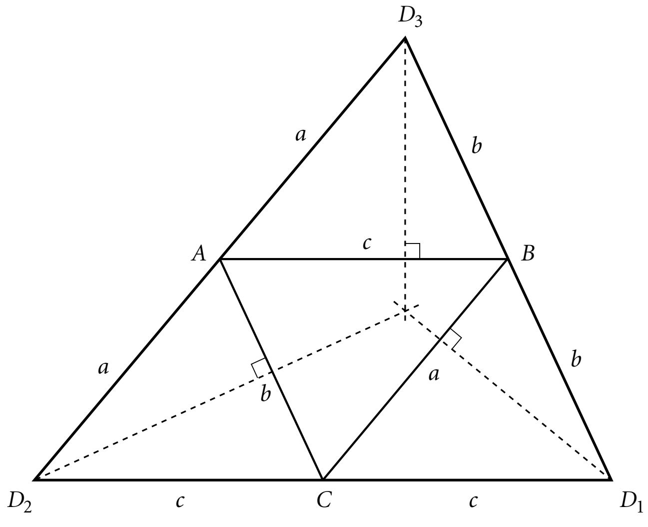
Van enveloppen kun je viervlakken maken. In de vorige aflevering hebben we dat in het bijzonder gedaan met een envelop van het A-formaat en wel door aan de voor- en achterkant de middens van de bovenrand als nieuwe hoekpunten te kiezen (figuur 1). Dit speciale viervlak hebben we 'A-viervlak' gedoopt.



figuur 1

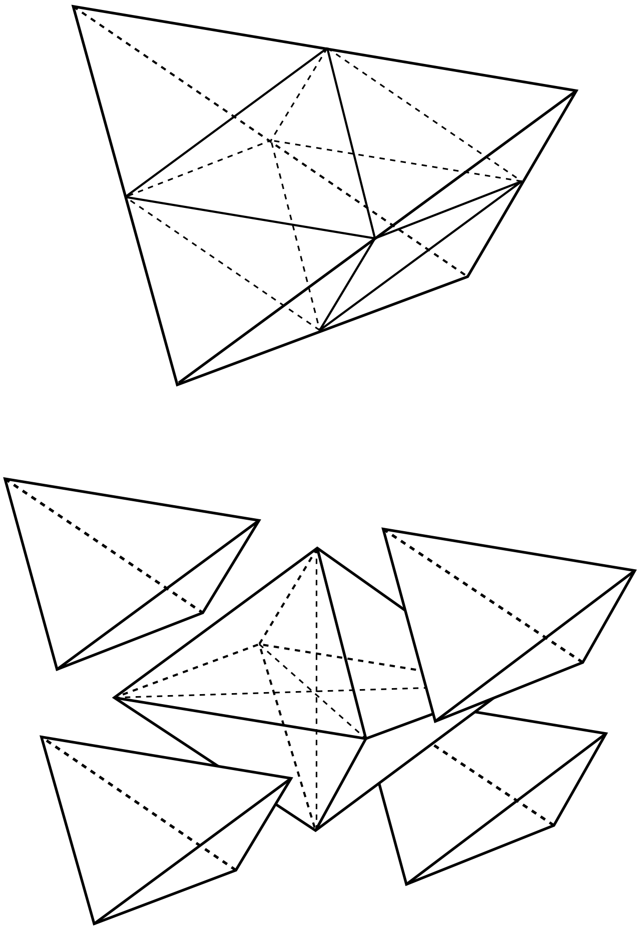
We hebben gezien dat het A-viervlak ruimtevullend is. Maar het blijkt nog een sterkere eigenschap te hebben: het is 'zelfvullend'.
Tenslotte zullen we zien dat het A-viervlak een Voronoi-cel is (evenals de afgeknotte octaëder, waarmee het een speciale relatie heeft).

Zelfvullend



figuur 2

Een A4-rechthoek kun je verdelen in twee A5-recht-hoeken; die zijn gelijkvormig met de oorspronkelijke A4-rechthoek. Een willekeurig parallellogram kun je verdelen in vier kleinere parallellogrammen die gelijkvormig zijn met het originele. Een figuur, die zich laat verdelen in een aantal kleinere, gelijkvormige kopieën van zichzelf, noemen we zelfvullend. Bij fractale figuren heb je ook zo iets. Die zijn opgebouwd uit verkleinde kopieën van zichzelf. Figuur 2 laat zien dat elke driehoek zelfvullend is. Als je er even over nadenkt, voel je wel aan dat een zelfvullende figuur altijd vlakvullend moet zijn. Een formeel bewijs vind je in [1], bladzijde 151 en verder. Het omgekeerde is niet waar. Een regelmatige zeshoek is vlakvullend, maar niet zelfvullend.



figuur 3

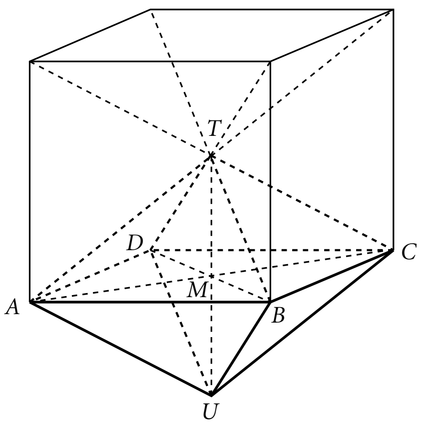
In de ruimte gaat het analoog. Een parallellepipedum is zelfvullend; acht kopieën zijn nodig voor een vulling.

Een recht driezijdig prisma, of algemener een recht prisma waarvan het grondvlak een zelfvullende (vlakke) figuur is, is een zelfvullend lichaam.
In figuur 3 zie je dat het A-viervlak zelfvullend is. Snijd de vier hoeken eraf: snijden door de middens van de ribben. De afgesneden stukken zijn weer A-viervlakken. Er blijft een achtvlak over, dat weer is opgebouwd uit vier A-viervlakken.

Andere ruimtevullende viervlakken

Voor zover ons bekend is, zijn er behalve het A-viervlak slechts drie andere ruimtevullende viervlakken. We noemen ze alle drie.

- Bekijk figuur 4; de kubus heeft ribbe 2. ABCT (ééntwaalfde-deel van de kubus) is een ruimtevullend viervlak met ribben 2, 2, $2\sqrt{2}$ en opstaande ribben $\sqrt{3}$.



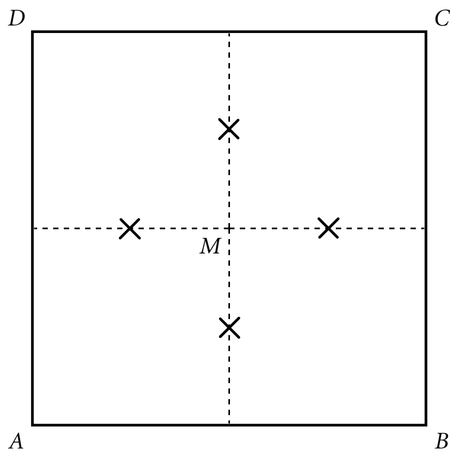
figuur 4

- Door ABCT te halveren krijgen we het ruimtevullende viervlak ABMT met ribben 2, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ en opstaande ribben 1, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ (de helft van het A-viervlak ABUT).
- Neem een A-viervlak met ribben 2, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$. Verdeel het in vieren vanuit het middelpunt van de ingeschreven bol. De stukken hebben een grensvlak van het A-viervlak als grondvlak en het middelpunt van de ingeschreven bol als top. Zo'n stuk is een ruimtevullend viervlak met ribben 2, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ en opstaande ribben $\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

De eerste twee viervlakken blijken zelfs zelfvullend te zijn.

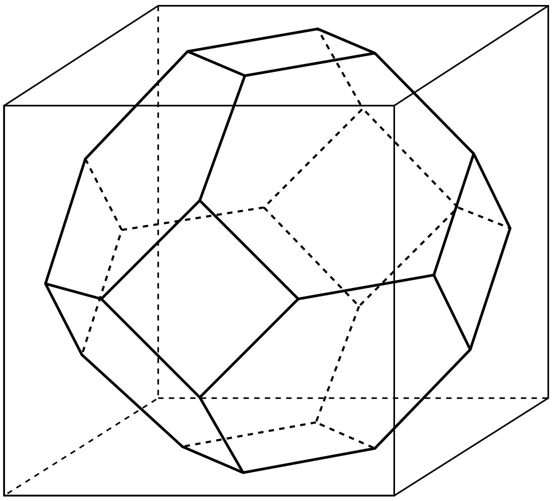
Voronoi-cellen in de ruimte

Op bepaalde punten in de ruimte zijn bakkers gevestigd. De bewoners van de ruimte kopen hun brood altijd bij de dichtstbijzijnde bakker. Zo hoort ieder punt van de ruimte tot het afzetgebied van een bepaalde bakker. Sommige punten liggen even ver van twee bakkers (en verder van de andere bakkers). Die liggen dus op de grens van twee afzetgebieden; ze liggen op het middelloodvlak van de verbindingslijn tussen de twee betreffende bakkers. Deze afzetgebieden heten Voronoi-cellen (ook wel Dirichlet gebieden).
Kunnen we de vestigingsplaatsen van de bakkers zo kiezen dat alle afzetgebieden congruent zijn ? In dat geval is dat afzetgebied een ruimtevullend lichaam. Een flauwe manier om dat voor elkaar te krijgen is de volgende. Neem een kubussenrooster en plaats een bakker in het midden van elke kubus. De kubussen zijn de Voronoi-cellen.
We kunnen het ook zo regelen dat de afzetgebieden ruitentwaalfvlakken worden. Kleur daarvoor de kubussen in een rooster afwisselend zwart en wit, zoals we al eerder deden (in de vorige aflevering). We vestigen de bakkers in de middelpunten van de zwarte kubussen. Kunnen we ook zo te werk gaan dat de Voronoi-cellen juist onze A-viervlakken zijn ? De bakkers moeten dan gevestigd worden in de middelpunten van de A-viervlakken. Kijk nog eens naar figuur 4. *ABCDTU* is verdeeld in vier A-viervlakken, waarvan de middelpunten binnen vierkant *ABCD* liggen, zoals in figuur 5 is aangegeven. Op ieder grensvlak van de kubus komen dus vier bakkers. De 24 bakkers vormen de hoekpunten van een interessant lichaam: de zogenaamde afgeknotte octaëder. Het wordt begrensd door zes vierkanten en acht regelmatige zeshoeken.



figuur 5

De afgeknotte octaëder is zelf ook weer een Voronoicel. Dat zie je als volgt. Begin weer met een kubussenrooster van 2 bij 2 bij 2. Vestig in elk roosterpunt een 'hoek-bakker' en in het middelpunt van elke kubus een 'centrum-bakker'. Hoe ziet het afzetgebied van een centrum-bakker eruit ? Als alleen de zes naburige cen-



figuur 6

trum-bakkers zijn concurenten waren, zou hij de hele $2 \times 2 \times 2$-kubus als afzetgebied hebben. De acht naburige hoekbakkers eisen echter ook ieder een stuk van de kubus voor zich op. Kijk naar het verbindingslijnstuk van onze centrum-bakker en een van de naburige hoekbakkers. Dit is de lichaamsdiagonaal van een $1 \times 1 \times 1$-kubus. Deze kubus wordt door het middelloodvlak van de lichaamsdiagonaal gesneden volgens een regelmatige zeshoek. De ene helft van de kubus is voor de centrumbakker, de andere voor de hoek-bakker. Het hele afzetgebied van de centrum-bakker bestaat uit acht van zulke halve kubussen, die samen het afgeknotte achtvlak vormen. Het afzetgebied van een hoek-bakker bestaat ook uit acht van die halve kubussen en ziet er dus net zo uit.
We hebben hier de fraaie situatie: de middelpunten van de A-viervlakken zijn de hoekpunten van de afgeknotte octaëders, de middelpunten van de afgeknotte octaëders zijn de hoekpunten van de A-viervlakken.
Vlakke Voronoi-diagrammen komen in de tweede fase in het vwo-profiel N&T.

Literatuur

1 *Grünbaum-Sheppard*
Tilings and Patterns
W.H.Freeman (New York, 1989)
ISBN 0-7167-1998-3

Verschenen

Marianne I.C. Offereins
Vrouwenminiaturen: biografische schetsen uit de exacte vakken
Uitg. Centreum Vrouwen en Exacte Vakken,
Utrecht (1996)
ƒ 30,00; 96 bladzijden
ISBN 90 800122 5 4

Een mooie uitgave over vrouwen die zich onderscheiden hebben in de exacte vakken. Van Hatjepsoet, via Hildegard von Bingen en Sophie Germain tot Jeannette Donker-Voet.
Komen deze namen u niet bekend voor, dan is dat precies de reden waarom u dit boekje moet aanschaffen. Ook een aanbevolen cadeau voor meisjes met een exact pakket of denkend over hun pakketkeuze.

Verschenen

Bij John Wiley & Sons, Inc. is verschenen een diskette met de titel **Multigraph**. Op de hoes staat te lezen:
A software package for multivariable calculus that fills the gap between graphic calculators and high powered computer algebra systems. Je hebt echter nogal wat nodig om dit pakket te kunnen gebruiken: 386-PC, Windows 3.1 of hoger, 4 MB RAM en 5 MB ruimte op de harde schijf, VGA 16 kleuren monitor. Van een functie van twee variabelen kan een 3-D grafiek getekend worden, waar op verschillende manieren tegenaan gekeken kan worden. Ook kan een hoogtekaart getekend worden. En als laatste optie kan een 2-dimensionaal vectorveld getekend worden, en kunnen daar eenvoudige manipulaties mee worden uitgevoerd.
Het geheel kost £ 22,50.

Dag, leraar

M.C. van Hoorn

Het PMVO

Het gaat niet best met ons onderwijs. De minister heeft ernstige begrotingsproblemen, de wachtgelduitgaven nemen steeds maar toe, een kwart van de scholen voor voortgezet onderwijs zit in financiële zorgen, scholen komen alleen nog in aanmerking voor tweedehands computers die door overheidsdiensten zijn afgedankt.
En wiskunde is nog steeds geen geliefkoosd examenvak.
Geheel onkundig van al de ellende gaat het Procesmanagement Voortgezet Onderwijs gewoon zijn gang. Geld speelt geen rol voor dit PMVO. Voor de derde keer vond in de Jaarbeurs te Utrecht de tweedefasedag ‘Studiehuis in de steigers’ plaats, namelijk op 27 maart jongstleden. En wie het Bulletin van het PMVO doorneemt, ziet een wereld van vrolijkheid, pret vanwege het zelfstandig leren, vanwege nieuwe vakken, vanwege wéér een gratis brochure die door het PMVO is uitgebracht.
Ik neem eens een brochure van het PMVO ter hand. Over de ‘Bibliotheek in het Studiehuis’ gaat deze. Het is een brochure vol idealen, en meer staat er helaas ook niet in. Het uitbrengen van zo’n brochure kan trouwens niet zoveel kwaad, behalve dan dat zij geld heeft gekost.

Bezig met veranderingen

Het PMVO heeft natuurlijk gelijk. Het is ingesteld om belangrijke veranderingen te bewerkstelligen. Daar moet het dus positief mee aan de gang, in vervolg op de activiteiten van de commissies Van Veen en Ginjaar-Maas.
Voor de bovenbouw van het havo en vwo was er, zoals de commissie Ginjaar-Maas al had gezien, heel wat werk te doen:

- *Leerlingen moeten niet als kleine kinderen worden behandeld, moeten zich kunnen ontplooien.*

Zij moeten bovendien, onder meer bij wiskunde, zelfstandig kunnen omgaan met software. Het idee van het zelfstandig leren is uit deze, geheel juiste constateringen voortgekomen.

- *De vrije pakketkeuze moet nodig op de helling.*

Dit heeft de formering van de vier profielen opgeleverd.

- *De inhoud van de vakken is in veel opzichten verstard.*

Bij het gebruiken van informatietechnologie was een achterstand ontstaan. Ook was er nog steeds verkokering, samenhang tussen vakken ontbrak.

Zo bezien is het goed dat het PMVO voortvarend aan de vernieuwingen werkt, en is het logisch dat er enthousiasme is opgewekt. Er is immers een erkenning gekomen van problematieken die door veel docenten al waren onderkend. Het is altijd prettig te zien dat ‘hogere’ instanties weten wat er speelt.

Langs elkaar heen werken

Wat gebeurde er tijdens de PMVO-dag op 27 maart in de Jaarbeurs? ‘Centraal staan ervaringen van scholen’, heette het. Dit waren scholen die tijdelijk wat extra geld hadden gehad, iets wat er niet bij werd verteld. Bij lezing van het programma kon je gemakkelijk op de gedachte komen dat er al heel veel gebeurt, dat de invoering van het Studiehuis nu nog alleen een kwestie is van een wet die even moet worden aangenomen. Maar wat moeten we met ‘Schoolsignalementen: pedagogisch-didactische kenmerken van het Studiehuis in verschillende afdelingen en leerjaren’? Het lijkt of iemand eindelijk het wiel heeft uitgevonden. Kretologie is het, meer niet.
Goed, men kon vast veel van zijn gading vinden op die dag in de Jaarbeurs. Er was jammer genoeg ook iets niet te vinden, en dat was informatie over nieuwe examenprogramma’s.

Het wetsontwerp aangaande de veranderingen van de bovenbouw havo/vwo bevat niets over zelfstandig leren, maar gaat over de profielen en de invulling daarvan, alsmede over de toetsing, die ‘aan strakkere regels wordt gebonden’. Het lijkt erop, dat het PMVO met andere dingen bezig is dan de Staatssecretaris.

Informatie voor de leraar

De afgelopen winter troffen we een schrijven aan van de LPC en de SLO. De nieuwe examenprogramma’s, concepten weliswaar, waren te koop bij de SLO, lazen we. Om precies te zijn ging het om ‘informatiebrochures waarin de examenprogramma’s zijn opgenomen’. De informatiebrochure voor het vak wiskunde kostte *ƒ* 19,– , de gehele set brochures voor alle vakken *ƒ* 375,– .
Leraren konden zich ook opgeven voor voorlichtingsbijeenkomsten ‘waar de inhoud van de brochures besproken wordt’. De brochures waren blijkbaar niet duidelijk. Maar, lazen we, haast u, want ‘vol is vol’.
Het is droevig, zo onbelangrijk wij in Nederland de inhoud van de

vakken zijn gaan vinden, en hoe minderwaardig de leraar is geworden. Allerlei overbodige brochures zijn gratis, maar een leraar die zich wil voorbereiden op nieuwe vakinhouden moet daarvoor in de buidel tasten. Nou ja, de school betaalt het wel, uit de scholingspot, ook al is het geen scholing.
We waren al enigszins voorbereid op zo'n miskenning van de leraar. De nieuwe (concept-)examenprogramma's vbo/mavo waren evenmin gratis. In Uitleg van 11 december 1996 lazen we dat deze programma's voor ƒ 2,50 per stuk verkrijgbaar werden gesteld bij de SLO. Geld vragen voor examenprogramma's, dat is principieel onjuist, dacht ik, toen ik dit las. Een meevaller, zo'n bedrag, realiseer ik mij achteraf.
Men had iets kunnen leren van de gang van zaken rond de invoering van de nieuwe C- en D-wiskundeprogramma's in vbo en mavo. Dit schooljaar, 1996-1997, maken het ministerie, de CEVO en de inspectie zich ernstig zorgen over de bekendheid bij leraren met deze nieuwe programma's. Men vreest, achteraf, dat de informatie over de programma's niet toereikend is geweest.
Is het dan niet een misrekening dat thans de informatie voor leraren over de nieuwe programma's voor havo en vwo zo moeilijk verkrijgbaar is?

Nadere analyse

Analyseren we de vernieuwingsdrang van het PMVO (en het Ministerie), dan zien we dat sommige problemen inderdaad worden aangepakt, maar dat andere problemen blijven liggen en dat tegelijk nieuwe problemen worden opgeworpen. Het is heel betreurenswaardig dat in het vernieuwingsproces geen bezinningsmogelijkheid is ingebouwd. Alles wordt gedicteerd, het zelfstandig leren wordt tot norm verheven, en de keuze voor de vier profielen wordt gepresenteerd als de enig mogelijke.
Nauwkeuriger:

- *Scholen krijgen ruimte om het zelfstandig werken te bevorderen.*

Dat is goed. Maar door lobbywerk van belangengroepen ontstaan zoals vanouds volle examenprogramma's. In het eerste jaar moet de ervaring met de nieuwe programma's nog groeien. Is dat een goed moment om een brede didactische vernieuwing in te voeren? Een didactische vernieuwing kan trouwens nooit in één schooljaar worden gerealiseerd.
En elke leraar zal altijd aangesproken moeten kunnen blijven worden op zijn verantwoordelijkheid. Beseft men dat de leraar de centrale figuur zal blijven?

- *De vier profielen leggen erg veel vast.*

Zij laten geen ruimte voor veranderingen in de loop van de komende jaren. Het is alsof voor eens en altijd is vastgesteld dat de maatschappelijke vraag anno 1995 de enig juiste is. Waar is, bijvoorbeeld, plaats voor klimatologie (= aardrijkskunde + scheikunde), het vak van onze Nobelprijswinnaar Crutzen? Waar is plaats voor bewegingswetenschappen? Aan dit soort 'moderne' vervolgopleidingen is simpelweg niet gedacht. De – vermeende – maatschappelijke vraag van 1995 wordt als het ware versteend in een onderwijsmodel. Tegelijk zit er allerlei willekeur in de invulling van de profielen. Wiskunde voor iedereen (op het havo) verplicht, wat een onzin! Al vanaf 1863 (1) fungeert er een stelsel van middelbaar onderwijs dat voortreffelijke mensen heeft voortgebracht, sommigen wiskundig geschoold, anderen niet. En dat moet in 1998 opeens veranderen?
Wordt er trouwens ergens iets gedaan aan het interessanter maken van wiskunde als examenvak?

- *Integratie van vakken heet zeer gewenst.*

Niet valt in te zien waarom dit samen moet gaan met de invoering van de profielen. Het nieuwe vak wiskunde A, in feite een unieke stap op weg naar vakkenintegratie, is destijds ingevoerd zonder andere vernieuwingen. Het is het enige succes – gemeten naar het aantal leerlingen dat wiskunde A kiest – dat de wiskunde de afgelopen jaren in het havo/vwo heeft geboekt. (Dat het vak wiskunde A vanwege zijn interne tegenstrijdigheid en vanwege zijn taligheid geen lang leven beschoren kan zijn is een andere zaak.)

- *Intussen wordt nu wel de inhoud van programma's vernieuwd, maar wordt niet vastgelegd dat dit veel vaker gaat gebeuren dan thans gebruikelijk, zeg elke vier jaar.*

Technologische veranderingen gaan sneller dan onderwijsvernieuwing, dat zal zo blijven, maar waarom wordt er een extra rem op onderwijsvernieuwing gezet door middel van overgedetailleerde examenprogramma's die bovenal worden beoordeeld op toetsbaarheid ('strakkere regels')? Regelzucht werkt altijd verstarrend. Ervaringen met de toetsing van de basisvorming spelen blijkbaar geen rol.

- *Om een onderwijsinhoudelijke vernieuwing kansen te bieden, moet deze niet samengaan met andere veranderingen.*

Maar in 1998 wordt tegelijk de landelijke lumpsumbekostiging in het voortgezet onderwijs ingevoerd, en bovendien moet in 1998 de zogenaamde herschikking van het vbo zijn beslag krijgen. Heel ongelukkige planning! Hier kan het PMVO trouwens niets aan doen. Scholen zullen in de eerste plaats willen overleven, en dan pas aan de gang willen gaan met onderwijs-inhoudelijke veranderingen. Ik lees ergens al over een 'tendens dat veel scholen de nieuwe Tweede Fase beleidsarm zullen invoeren' (2). Hoogst ongelukkig!

- *Europa wordt één, maar in de verschillende Europese landen wordt geheel separaat gesleuteld aan het onderwijs.*

Misschien is dat maar beter ook, de bureaucratisering hoeft niet nog groter. Dit verklaart echter niet waarom zelfs niet gekeken wordt naar wat in andere landen gebeurt. Nergens elders in Europa ontstaan wiskunde A-programma's, en dat is echt niet omdat men elders achterloopt op Nederland. Het zelfstandig leren is ook al zo'n eigen vinding. Ondanks het goede ervan willen we toch ook weten welke resultaten het oplevert. Maar van enig serieus vergelijkend onderzoek is nergens sprake (3).
Nogmaals, Nederland zou een bezinningsmogelijkheid moeten inbouwen, en niet het Studiehuis introduceren met louter klaroengeschal.

Slot

Terug naar de tweedefasedag van het PMVO in de Jaarbeurs. Niets, ook, was daar aan de weet te komen over scholingsprogramma's, noodzakelijk voor leraren die zich willen voorbereiden op nieuwe vakken en vakinhouden. Scholingsprogramma's moeten nodig worden opgestart, wil in 1998 het Studiehuis worden ingevoerd. Voor wiskunde moet er, onder andere, scholing komen voor het gebruiken van informatietechnologie, maar over zulke scholing is eenvoudigweg niets bekend. Nee hoor, vakkennis van docenten telt niet.
Wat we zien, resumerend, is dat leraren extra hun best moeten doen om iets van examenprogramma's aan de weet te komen, en om vakinhoudelijke scholing te kunnen volgen.
De tweedefasedag 'Studiehuis in de steigers' had eindelijk eens een 'Dag van de leraar' moeten worden. Maar intussen weet ik een betere naam voor deze dag in de Jaarbeurs. Namelijk: *Dag, leraar.*

Noten

1 *Kees Mandemakers*
HBS en Gymnasium
Amsterdam 1996.
Opm. Het onderwijsstelsel is gewijzigd in 1968; wiskunde is toen - gelukkig - evenmin verplicht geworden.

2 **VVO-flits jaargang 2, nr.10, febr. 1997**
De VVO is de Vereniging van schoolleiders

3 *J.C. Traas*, geciteerd in
Dronken van zoveel vrijheid
NRC-Handelsblad, 2 mei 1996

Verschenen

**Cabri in de klas:
voor meetkunde met de computer**

Vlakke meetkunde is een van de onderwerpen waarvoor ruimte is gemaakt in de programma's voor de tweede fase van het vwo. Het onderwerp leent zich bijzonder goed voor het leren redeneren en bewijzen. Een krachtig hulpmiddel hierbij is het computerprogramma Cabri Geometry II. Uitgeverij Thieme heeft nu een lesmethode bij deze software uitgebracht: *Cabri in de klas,* meetkunde met de computer.
De schrijvers van *Cabri in de klas* maken gebruik van het computerprogramma Cabri Geometry II om leerlingen vermoedens te laten ontwikkelen die vervolgens bewezen moeten worden. Het boek is zo geschreven dat leerlingen zelfstandig op verkenning kunnen gaan in de wereld van de vlakke meetkunde. Op deze ontdekkingstocht kunnen ze zich verdiepen in Voronoi-diagrammen, conflictlijnen en merkwaardige lijnen in een driehoek.
In het eerste hoofdstuk leren de leerlingen met Cabri te werken. In de volgende hoofdstukken worden de leerlingen eerst aan de hand genomen om vervolgens steeds zelfstandiger wiskundige bewijzen te leveren. Een deel van de opdrachten moet in Cabri worden uitgevoerd. Schriftelijke oefeningen in het redeneren vormen het andere deel.

Het leerlingenboek *Cabri in de klas* (ISBN 9003 442231) kost *f* 14,90. Het docentenboek (ISBN 9003 442258) inclusief een diskette met macro's en voorbeeldbestanden kost *f* 43,90. Voor informatie over *Cabri in de klas* kunt u de docentenlijn van uitgeverij Thieme bellen:
(0575) 59 48 80.
e-mail adres: info@thieme

Redactie Euclides

Agnes Verweij neemt afscheid

Kees Hoogland



Agnes Verweij, geflankeerd door Jan de Lange, Jan van Maanen en Jan Maassen in de studiecommissie wiskunde B vwo.

Inleiding

De redactie van Euclides bestaat uit een kernredactie, die alle stukken bekijken, beoordelen en plaatsen en een aantal redactieleden, die elk met een eigen specialiteit een deelgebied van het wiskundeonderwijs overzien en daarbij artikelen schrijven en doen schrijven. Of juist artikelen van commentaar voorzien die door anderen op zo'n gebied worden geschreven en aan Euclides aangeboden. In elke jaargang worden op deze wijze ruim 300 bladzijden gevuld.
Redacteuren worden in principe benoemd voor een termijn van vier jaar. Menig redactielid echter maakt meerdere van zulke termijnen vol.

Voor een redactie bestaande uit 12 personen kunt u nu zelf wel uitrekenen hoeveel wisselingen er gemiddeld per schooljaar plaatsvinden.

Redactie gewijzigd

Ook in dit schooljaar vinden er weer wijzigingen plaats in de redactie. Sommige redacteuren krijgen andere werkzaamheden waardoor ze het redactiewerk neerleggen. Anderen besluiten dat na één of twee termijnen hun inzet voor Euclides genoeg is geweest.
Dit schooljaar verlaten Klaas Lakeman en Agnes Verweij de redactie, terwijl al enige tijd geleden Jan Koekkoek met zijn redactiewerkzaamheden is gestopt.

Jan Koekkoek was gespecialiseerd in soft-ware en computergebruik en heeft daarover sinds eind 1992 een aantal bijdragen aan Euclides geleverd. Klaas Lakeman heeft sinds 1988 bijdragen geleverd aan Euclides.

Agnes Verweij

Zonder afbreuk te doen aan de bijdragen van de eerdergenoemde redacteuren, wil de redactie toch uitgebreider stilstaan bij het vertrek van Agnes Verweij. Net als Klaas Lakeman, kwam Agnes in 1988 bij de redactie van Euclides. Agnes werkte toen al als vakdidacticus aan de universitaire lerarenopleiding van de TU Delft. Vrijwel direct ging zij de eindredactie verzorgen. De eindredactie is waarschijnlijk de meest tijdrovende klus in de redactie, waarbij grote nauwkeurigheid gepaard moet gaan aan een brede kennis over allerlei gebieden die te maken hebben met wiskunde en wiskundeonderwijs.
Toen dit eindredactiewerk in 1991 werd overgenomen door Ynske Schuringa-Schogt, bleef Agnes lid van de kernredactie. Zij hield interviews, schreef verslagen van bijeenkomsten of zomaar een prachtig artikel over een tentoonstelling in Boymans-van Beuningen (1991, Perspectiven, Euclides 67-1). Verder gaf Agnes zeer gedetailleerd commentaar op alle stukken die aan Euclides werden aangeboden. Zonder overdrijving kan gesteld worden dat bijna alles dat in Euclides de afgelopen 9 jaar geplaatst is, eerst aan het kritische oog van Agnes voorbij getrokken is. Zij was in staat om direct echte inhoud van bla-bla te onderscheiden, suggesties te doen voor een betere opbouw en indeling en tegelijkertijd aan te geven waar de formuleringen, de spelling en de interpunctie niet deugde. Op deze wijze heeft Agnes een buitengewoon grote bijdrage geleverd aan de kwali-

teit van Euclides. De redactie zal zich zeker moeten inspannen om dit niveau van becommentariëren te evenaren.
Agnes bedankt!

Welkom

Inmiddels kunnen we ook twee nieuwe redactieleden verwelkomen. Allereerst Wim Doeve, die deel uit zal gaan maken van de kernredactie en die vanuit zijn ervaring met binnen- en buitenlands wiskundeonderwijs een bijdrage zal gaan leveren aan het becommentariëren van inzendingen. Ten tweede verwelkomen we Joost van 't Spijker, die zich zal gaan toeleggen op de berichtgeving rond informatie- en communicatietechnlogie (ICT). Het zal niemand ontgaan zijn dat de ontwikkelingen op het gebied van ICT in zeer snel tempo effect hebben op ons wiskundeonderwijs. De redactie hoopt de ontwikkelingen zo goed mogelijk te signaleren en daarover te berichten in Euclides. Plannen voor een home-site van de Vereniging, voor Euclides-berichten on-line, en voor het uitwisselen van ideeën via e-mail – U ziet: het jargon is er al. – zijn al door diverse leden van de Vereniging geopperd en soms al in gang gezet.

Wensen van de redactie

Het is een niet aflatende wens van de redactie de lezers nauwer te betrekken bij de inhoud van Euclides. Deze betrokkenheid kan op meerdere manieren getoond worden.
Ten eerste via kattebelletjes aan de hoofdredacteur over welk soort berichtgeving u nu graag (meer) in Euclides zou willen zien.
Ten tweede via bijdragen uit de dagelijkse praktijk van het wiskundeonderwijs. De redactie vindt Euclides hét medium voor wiskundeleraren die iets over hun ervaringen willen vertellen, die hun didactische ideeën naar voren willen brengen, maar ook die hun opinie over leerplannen, examens en ontwikkelingen willen geven. Schroom niet om uw bijdragen op papier te zetten en in te zenden. In de redactie is alle bereidheid om zo'n bijdrage in een voor Euclides geschikte vorm te krijgen. Alhoewel het schrijven van stukjes natuurlijk altijd tijd kost, kan de redactie u verzekeren dat het veel voldoening geeft een bijdrage van uw eigen hand in Euclides te zien.
Ten derde kan de redactie altijd nieuwe redactieleden gebruiken. Spontaan aanmelden is toegestaan.

bespreking

Mark Freidlin Markov
Processes and Differential Equations: Asymptotic Problems (152 pagina's)
Birkhäuser Verlag, Basel, 1996
ISBN 3-7643-5392-9
Prijs: DM 44,-/ sFr 38,—

Aan de Eidgenossische Technische Hochschule (ETH) in Zurich worden elk jaar wiskundigen van naam uitgenodigd een serie lezigen te geven voor een zo breed mogelijk publiek. In zo'n lezingencyclus mogen ze dan een overzicht geven van de stand van zaken in hun eigen specialisatie. Inmiddels is een twaalftal van dergelijke lezingencycli door Birkhäuser gepubliceerd in de serie "Lectures in Mathematics ETH Zurich". Volgens de uitgever zijn de boeken in deze serie "lively and informal in style, moderate in size and price" en zullen de boeken aantrekkelijk zijn voor "professionals and students alike, bringing a quick understanding of some important areas of current research".
Het hier te bespreken boekje gaat over toepassingen van kansprocessen, met name Markov-ketens en Markov-processen, binnen de theorie van de partiële differentiaalvergelijkingen, één van de fascinerende toepassingen van Markov-processen binnen de wiskunde zelf. De laatste decennia zijn meer van dergelijke toepassingen ontwikkeld, bijvoorbeeld de Markov Chain Monte Carlo methoden voor het numeriek berekenen van moeilijke integralen. De schrijver van het boekje is de Rus Mark Freidlin, een erkende autoriteit op dit gebied, die zelf ook veel heeft bijgedragen aan de ontwikkeling van de theorie. Wie na deze inleiding al bijna op weg was naar de boekhandel om het boekje te bestellen, raad ik aan om ook de rest van deze bespreking nog even te lezen. Hoewel de stijl redelijk informeel is, is de inhoud op een zodanig niveau dat een flinke voorkennis zowel van stochastische processen als van partiële differentiaalvergelijkingen nodig is om het boekje te kunnen lezen. Dus, als u die Markovketens bij Wiskunde A zo interessant vindt en u wilt wel eens wat meer aardige voorbeelden of toepassingen zien, zou ik dit boekje niet aanraden. Als u van plan bent onderzoek in het betreffende gebied te gaan verrichten, vindt u hier een uitstekend overzicht van de tot nu toe behaalde resultaten.

Rob Potharst

Stand van zaken Tweede Fase

Kees Hoogland

Inleiding

Op 1 augustus 1998 is de invoering van de vernieuwde Tweede Fase havo/vwo. Dat lijkt misschien nog een eindje weg. Volgend schooljaar echter zullen op scholen al de meeste beslissingen genomen worden over de organisatie en de inrichting van die Tweede Fase.
De plannen van directies zullen over het algemeen schoolbrede plaatjes zijn. Het is zeer van belang dat de wiskundesectie goed op de hoogte is van de regelingen, laatste plannen en inhoudelijke vernieuwingen. Tijdig die schoolplannen kritisch bekijken vanuit het vak wiskunde kan voor het werken op school de komende jaren heel wat uitmaken. In dit artikel zullen de meest recente ontwikkelingen op een rijtje worden gezet. Ik onthoud me bewust van commentaar op deze ontwikkelingen. Het artikel is louter informatief. Het geven van meningen over deze ontwikkelingen en het schetsen van goede ideeën om het wiskundeonderwijs in de vernieuwde omstandigheden vorm te geven, laat ik gaarne over aan de lezers. Ik zie bijdragen daarover met belangstelling tegemoet.

De examenprogramma's

De meest recente examenprogramma's staan in de paarse SLO-brochure van december 1996, geschreven door Douwe Kok. Daarin ook meer algemene tips en opmerkingen en verwijzingen naar relevante artikelen. Zeer lezenswaardig!
(*SLO-verkoop, 053 4840 305, f19,–*)
Werd er ooit nog wel eens gesproken van verschillende wiskundeprogramma's voor verschillende profielen, bijvoorbeeld wiskunde havo E&M, recentelijk heet alles weer wiskunde A en B, behalve natuurlijk het programma van het gemeenschappelijk deel vwo. De indices 1 en 2 proberen duidelijk te maken dat het gaat om deelverzamelingen van elkaar.
Dat ziet er als volgt uit:

havo	
C&M	wiskunde A_1
E&M	wiskunde A_{12}
N&G	wiskunde B_1
N&T	wiskunde B_{12}
vwo	
C&M	wiskunde A (keuze)
E&M	wiskunde A
N&G	wiskunde B_1
N&T	wiskunde B_{12}

Dat het programma voor N&G geen echte deelverzameling is van het programma voor N&T komt alleen voor bij wiskunde. Waarschijnlijk is dat geen lang leven beschoren.

vwo wiskunde B

In de brochure is wiskunde B voor vwo N&G en N&T nog niet opgenomen.
Daarmee is het Freudenthal instituut nog aan het experimenteren. Te hopen valt dat, gezien de aansluitingsproblemen onderbouw-bovenbouw, de resultaten de laatste jaren bij Wiskunde B vwo en de sterk afnemende belangstelling van leerlingen voor een studie in de exacte vakken, snel tot een goed onderwijsbaar programma wordt besloten. Dan zijn de schoolboeken daarvoor misschien ook nog op tijd.

vwo gemeenschappelijk deel

De wiskunde uit het gemeenschappelijk deel van het vwo beslaat 280 studiebelastingsuren (sbu). Een veel gestelde vraag is hoeveel lesuren dit nu moet worden. Daarop volgt steevast het antwoord dat de school dat zelf kan beslissen.
Naar directies toe is de volgende argumentatie misschien wel handig:
als het gemeenschappelijk deel in zijn geheel in 4 vwo wordt gepland dan betekent dat 280 van de 1600 beschikbare sbu. Dat komt neer op 17,5%.
Hoe de school ook besluit de vierde klas in te richten, het lijkt voor de hand te liggen dat wiskunde daar dan 17,5% van beslaat.
Bijvoorbeeld:

1 gewoon 32 lesuren in 4 vwo, dan voor wiskunde 5,6 uur.
2 20 instructie-uren en 12 werkgroep-uren, dan voor wiskunde respectievelijk 3,5 en 2,1 uur.

Etcetera.
Ik kan me haast niet voorstellen dat een school besluit dat voor wiskunde *minder* dan de op basis van sbu's te verwachten begeleiding nodig is in 4 vwo.

Praktische opdrachten

De toegenomen voorschriften voor het toetsen met praktische opdrachten in het schoolexamen is in een vorig nummer van Euclides al even kort aangekaart zijn. Hieronder zijn de gegevens even bij elkaar gezet.
Een praktische opdracht vergt een studielast van 10 - 20 uur.
In het overzicht staat achtereenvolgens het profiel, de totale omvang in sbu van de toetsing door middel van praktische opdrachten, het aantal opdrachten en de weging voor het schoolexamen.

havo			
C&M	20	1 á 2 opdr.	30%
E&M	30	2 á 3 opdr.	60%
N&G	30	2 á 3 opdr.	60%
N&T	40	2 á 4 opdr.	60%

vwo			
gem.	30	2 á 3 opdr.	30%
C&M/E&M	30	2 á 3 opdr.	60%
N&T/N&G		staat nog niet vast.	

In de discussie hierover lijken twee interpretaties door elkaar te lopen:

1 ‘De toetsing voor het schoolexamen bestaat voor 60% uit het doen van praktische opdrachten.’

2 ‘Het gewicht van het cijfer voor de praktische opdrachten is 60% van het cijfer voor het schoolexamen’.

Het verschil tussen deze interpretaties is voor de inrichting van de toetsing meer dan een nuanceverschil. De tweede interpretatie lijkt mij de juiste.

Ontwerp-inrichtingbesluit

Heb je net de SLO-brochure grondig bestudeerd, valt het volgende op de mat: ‘Ontwerp-besluit houdende wijzigingen van het Inrichtingsbesluit vwo-havo-mavo-vbo, …’
Dit is een concept van de wetswijziging die nodig is om de tweede fase definitief te maken. In deze concept-wetswijziging staan een aantal voor het vak wiskunde opmerkelijke zaken.
Die kunnen het best geïllustreerd worden met de drie citaten hiernaast.

Voor de andere profielen staan er vergelijkbare bijzinnen aan het einde. Steeds kan men de oorspronkelijke wiskunde uit het profiel vervangen worden door een ‘hogere’ wiskunde. Het venijn zit natuurlijk in de staart. Er kan niet meer gekozen worden voor wiskunde A én wiskunde B!
Op het ministerie is men van mening dat de vakken A1, A12, B1 en B12 strikt hiërarchisch geordend kunnen worden, zowel naar zwaarte als naar inhoud. Als dit concept wet wordt is er voor wiskunde opeens een toch wat andere situatie ontstaan.
Ik noem een paar mogelijke gevolgen. Of dat voor- of nadelen zijn, kunt u zelf besluiten.

1 In de wiskunde B klas zitten niet automatisch alleen maar leerlingen uit N&T en N&G.
2 Bij leerlingen uit E&M zal het voor de economieleraar niet meer duidelijk zij welke wiskunde deze leerlingen hebben.
3 Op basis van de wiskundeprestaties een profiel kiezen is minder zinvol geworden.
4 Je kunt de vakken naast elkaar roosteren. Leerlingen hebben altijd alleen maar wiskunde A of wiskunde B.
5 Het wordt gemakkelijker E&M en N&G te combineren. Je hebt daar maar één soort wiskunde bij nodig (B_1).
Misschien zijn er nog wel meer gevolgen te bedenken. Of dit voorstel ook wet wordt is natuurlijk nooit zeker. We houden u op de hoogte.

Inroosteren vakken

Het laatste punt dat aan de orde gesteld moet worden met het oog op de beslissingen van volgend jaar is het inroosteren van de vakken.
Als voorbeeld neem ik maar even de profielen N&G en N&T voor de havo.

N&G en N&T samen:
Veranderingen
Tellen en kansen
Ruimtemeetkunde
Toegepaste analyse 1
totaal 240 sbu

N&G alleen:
Kansrekening en statistiek
totaal 80 sbu

N&T alleen:
Ruimtemeetkunde
Toegepaste analyse 2
totaal 200 sbu

Het is overigens niet geheel duidelijk wat nu precies B_1 heet en wat B_{12}, maar dit terzijde.
In de praktijk zullen de leerlingen zoveel mogelijk bij elkaar gezet worden, zeker bij de onderdelen die voor beide profielen hetzelfde zijn.
In een recent artikel van het PMVO wordt aangeraden om de overige gedeelten vooral náást de onderdelen die ze samen doen, te roosteren.
Zoiets als:

N&G	N&G / N&T	N&T
80	240	200

De argumentatie daarbij is dat de profielspecifieke gedeelten vooral een uitbreiding en verdieping zijn en niet zo strikt hiërarchisch geordend.
Ik raad u aan om bijvoorbeeld eens de subdomeinen Toegepaste Analyse 1 en Toegepaste Analyse 2 door te nemen en te bedenken of u deze tegelijkertijd zou kunnen onder-

4. Het profieldeel van het profiel economie en maatschappij in het v.w.o. omvat de in onderstaande tabel vermelde vakken, met de daarbij vermelde normatieve studielast, uitgedrukt in uren:

economie 1,2	520
wiskunde A	320
geschiedenis	360
aardrijkskunde	360,

met dien verstande dat de leerling het vak wiskunde A mag vervangen door het deelvak wiskunde B1 of het vak wiskunde B1,2.

5. Het profieldeel van het profiel cultuur en maatschappij in het h.a.v.o. omvat de in onderstaande tabel vermelde vakken en deelvakken, met de daarbij vermelde normatieve studielast, uitgedrukt in uren:

a. een van de volgende vakken of deelvakken:

Franse, Duitse, Spaanse, Russische, Italiaanse, Arabische, Turkse en Friese taal en letterkunde 2	200
Franse, Duitse, Spaanse, Russische, Italiaanse, Arabische, Turkse en Friese taal en letterkunde 1,2	360

b. de combinatie van het deelvak culturele en kunstzinnige vorming 2 met een normatieve studielast van 120 uren, met een van de volgende deelvakken, met de daarbij vermelde normatieve studielast:

culturele en kunstzinnige vorming 3	(beeldende vormgeving)	240
culturele en kunstzinnige vorming 3	(muziek)	240
culturele en kunstzinnige vorming 3	(drama)	240
culturele en kunstzinnige vorming 3	(dans)	240

c.	geschiedenis	240
d.	economie 1	200
e.	wiskunde A1	160,

met dien verstande dat de leerling het deelvak economie 1 mag vervangen door het vak economie 1,2 en het deelvak wiskunde A1 mag vervangen door het vak wiskunde A1,2, het deelvak wiskunde B1 of het vak wiskunde B1,2.

7. Het vrije deel van elk profiel in het h.a.v.o. kan omvatten:

a. vakken en deelvakken, genoemd in het tweede tot en met vijfde lid, met dien verstande dat het profiel niet het deelvak wiskunde A1 of het vak wiskunde A1,2 in combinatie met het deelvak wiskunde B1 of het vak wiskunde B1,2 kan omvatten,

wijzen aan een groep leerlingen. Het lijkt van belang de schoolplannen voor roostering op dit soort zaken kritisch te bekijken.

Ten slotte

Misschien bent u wel boos of treurig geworden van deze informatie. Desondanks blijft het zaak de schoolplannen op basis van de ministeriële informatie voor de inrichting van de Tweede Fase, kritisch te blijven bekijken. Zeker als deze het wiskundeonderwijs direct beïnvloeden.
In Euclides proberen wij u te blijven informeren. Uw meningen en ervaringen kunnen misschien weer anderen helpen.

bespreking

H.A.Lauwerier Chaos met de Computer Epsilon Uitgaven, Utrecht
(deel 37, mei 1996), 192 blz., ISBN 90-5041-043-X, prijs ƒ 39,50 (Bfr.790)

Wat heet toevallig? In dezelfde week dat ik genoemd boek ter recensie ontving, kreeg ik ook het programma van de 50ste Vakantiecursus, georganiseerd door de Stichting Mathematisch Centrum (in Eindhoven op 22 en 23 augustus, in Amsterdam op 30 en 31 augustus). Het thema van deze cursus was: 'Hoe de Chaos de Orde verstoorde'. Diegenen die deze cursus bezocht hebben en kennisnemen van het te bespreken boek, zullen het met me eens zijn dat beide elkaar aanvullen en ondersteunen.
In 12 hoofdstukken komen achtereenvolgens aan de orde:

I	Het iteratieve model van Verhulst	**VII**	Conservatieve systemen
II	De vreemde aantrekker van Hénon	**VIII**	Julia en Mandelbrot
III	Zelf-gelijkvormige fractals	**IX**	Symmetrie en chaos
IV	Tweedimensionale iteratieve systemen	**X**	Invariante lijnen
V	De aantrekker van Lorenz	**XI**	Massa en maat
VI	Hemelmechanica	**XII**	Hopf bifurcatie

De schrijver stelt in zijn voorwoord dat met dit boek de lezer in staat gesteld wordt in de wereld van chaos en orde door te dringen door wiskundige theorie te verbinden met computer-experimenten. Het boek bedoelt hij voor een breed publiek, voor studerenden en voor belangstellenden die niet zoveel van wiskunde weten maar niet bang zijn voor een paar wiskundige formules. De bedoeling is dat beide groepen de in dit boek beschreven programma's ten uitvoer kunnen brengen en dat zij ook een beetje kunnen begrijpen wat er op het beeldscherm te zien is. Als zijn doelgroep noemt de schrijver ook leerlingen van de hoogste klassen van VWO en HAVO. Naar mijn idee is dat te hoog gegrepen. In het eerste hoofdstuk komen al begrippen voor als iteratief proces, dekpunt, bifurcatie, binalen. Op de bladzijden 13, 19, 47/48, 67/68, 69, 87, 103, 110/111, 119/121 komen stukjes wiskunde voor die wel belangrijk zijn voor het begrip, maar toch vaak ver uitsteken boven het niveau van de middelbare school. De wiskunde uit de hoofdstukken 10 tot en met 12 is uitdrukkelijk genoemd voor lezers die meer wiskundig geschoold zijn.
Om van het gebodene in voldoende mate te kunnen profiteren dient men wel enige vaardigheid te bezitten in het omgaan met een computer en in het gebruik van een programmeertaal. De programma's zijn in principe geschreven in Powerbasic. De auteur geeft ook enkele alternatieven aan: Qbasic, Quickbasic. Eigenlijk wordt het ons wel heel gemakkelijk gemaakt doordat bij het boek ook een diskette bij de uitgever besteld kan worden waarin de programma's van het boek zijn opgenomen (prijs f 22,50).
De toevoeging dat de programma's uit het boek zijn getest op een computer met 80486 DX2-66 processor geeft voldoende aanwijzing voor de benodigde apparatuur.
De bibliografie noemt veertien boeken waarvan zes in het Nederlands. Graag zou ik daar nog aan toevoegen de CWI-syllabus nr.41: Vakantiecursus 1996 Chaos.
Al met al een rijk voorzien boek wat zeer enthousiasmerend werkt.

H.J.Hofer

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Examenbesprekingen wiskunde mei 1997

Ook dit jaar heeft het bestuur van uw vereniging weer vele collega's bereid gevonden vrijwillig één of meer examenbesprekingen te leiden, waarvoor nogmaals dank. Ook dank aan de scholen voor het kostenloos beschikbaar stellen van een ruimte.
Nieuw dit jaar is dat in enkele plaatsen ook examenbesprekingen zijn voor het vbo B-examen.
Niet overal is de bespreking in hetzelfde gebouw als vorig jaar.

VBO-B dinsdag 20 mei 1997 van 16.00 - 18.00 uur

Plaats	*Gespreksleider*
ALKMAAR O.S.G. Willem Blaeu Robonsbosweg 11 072-5122477	Mw. T. Dekker 0299-371226
GRONINGEN Zernike College Bordewijklaan 34 050-5266866 *(station buslijn 5)*	Mw. R.M. Bosman 0596-572581 Hr. B.C. Hoekstra 050-4063061
's-HERTOGENBOSCH Ds. Pierson College G. ter Borchstraat 1 *(NS Den Bosch-OOST)*	Hr. F. den Ouden 0495-492262
St. ANNAPAROCHIE C.S.G. Ulbe van Houten Steven Huygenstraat 4 0518-401447 *(NS Leeuwarden bus 70; 30 min)*	Hr. A.J. Tobi 0518-403229

VBO/MAVO C/D woensdag 21 mei 1997 van 15.00 - 18.00 uur

Plaats	*Gespreksleider*
ALKMAAR O.S.G. Willem Blaeu Robonsbosweg 11 072-5122477	C: Mw. T. Dekker 0299-371226 D: Mw. C.E. Gaykema 020-6131802
AMSTERDAM C.S.G. Sweelinck College Moreelsestraat 21 020-6625697 *(tramlijn 5, 16, 24)*	C: Hr. M. Westland 0299-372255 D: idem
GRONINGEN Zernike College Bordewijklaan 34 050-5266866 *(station buslijn 5)*	C: Hr. S. Kooiman 050-5251289 D: Hr. J. Rijnaard 050-5254709
's-HERTOGENBOSCH Ds. Pierson College G. ter Borchstraat 1 *(NS Den Bosch-OOST)*	C: Hr. F. den Ouden 0495-492262 D: idem
ROTTERDAM Chr. College Henegouwen Henegouwerplein 16 010-4774533	C: Hr. W. de Jager 0184-683829 D: idem
St. ANNAPAROCHIE C.S.G. Ulbe van Houten Steven Huygenstraat 4 0518-401447 *(NS Leeuwarden bus 70; 30 min)*	C: Hr. A.J. Tobi 0518-403229 D: Geen
ZEIST KSG de Breul Arnhemsebovenweg 98 030-6915604	C: Hr. R.J. Roukema 0346-560429 D: idem
ZWOLLE Thorbecke SG Dr. C.A. van Heesweg 1 038-4564560	C: Mw. A.G.R. Wajer-de Graauw 0341-262445 D: idem

HAVO-A woensdag 21 mei 1997 van 16.00 - 18.00 uur

Plaats	*Gespreksleider*
AMERSFOORT De Amersfoortseberg Hugo de Grootlaan 25 033-4618845	Hr. R. ten Broeke 030-2444077
AMSTERDAM CSG Sweelinck College Moreelsestraat 21 020-6625697 *(tramlijn 5;16;24)*	Hr. S.T. Min 0229-237756
ARNHEM Mozaïek College Thorbeckestraat 17 026-4423028	Hr. J. de Geus 0575-521442
GOES Buys Ballot College Bergweg 4 0113-213010	Mw. C.M. de Bokx 0118-638551
's-GRAVENHAGE Hofstad Lyceum Colijnplein 9 070-3687670	Hr. H.P. v.d. Hoeven 079-3621253
GRONINGEN Röling College Melisseweg 2 050-5474141	Hr. L. Tolboom 050-3146093
's-HERTOGENBOSCH Ds. Pierson College G. ter Borchlaan 1 073-6442929 *(NS Den Bosch-OOST)*	Hr. H.J. Kruisselbrink 073-5216386
ROTTERDAM Chr. College Henegouwen Henegouwerplein 16 010-4774533	Hr. R.E. Houweling 0180-315302
ZWOLLE Van der Capellen SG Lassuslaan 230 038-4225202	Hr. J.Th.J. Mahieu 038-4540414

HAVO-B dinsdag 27 mei 1997 van 16.00 - 18.00 uur

Plaats	*Gespreksleider*
AMERSFOORT De Amersfoortseberg Hugo de Grootlaan 25 033-4618845	Hr. P.G.M. Kop 0182-529474
AMSTERDAM CSG Sweelinck College Moreelsestraat 21 020-6625697 *(tramlijn 5;16;24)*	Hr. S.T. Min 0229-273756
ARNHEM Mozaïek College Thorbeckestraat 17 026-4423028	Mw. M.M. Knops-Gianotten 0486-413814
GOES Buys Ballot College Bergweg 4 0113-213010	Hr. B. Dorssers 0113-230350
's-GRAVENHAGE Hofstad Lyceum Colijnplein 9 070-3687670	Hr. J. Remijn 070-3684525
GRONINGEN Röling College Melisseweg 2 050-5474141	Hr. J. Tolboom 050-3129436
's-HERTOGENBOSCH Ds. Pierson College G. ter Borchlaan 1 073-6442929 *(NS Den Bosch-OOST)*	Hr. C.J.M. Nienhuis 0411-678501
ROTTERDAM Chr. College Henegouwen Henegouwerplein 16 010-4774533	Hr. H.R.K.T. Hillebrand 0180-523552
ZWOLLE Van der Capellen SG Lassuslaan 230 038-4225202	Hr. J.P. Scholten 053-4768791

VWO-A woensdag 21 mei 1997 van 18.30 - 20.30 uur

Plaats	*Gespreksleider*
AMERSFOORT De Amersfoortseberg Hugo de Grootlaan 25 033-4618845	Hr. E. Schimmel 0342-472123
AMSTERDAM CSG Sweelinck College Moreelsestraat 21 020-6625697 *(tramlijn 5;16;24)*	Hr. J.P. Muthert 020-6253065
ARNHEM Mozaïek College Thorbeckestraat 17 026-4423028	Hr. J. de Geus 0575-521442
GOES Buys Ballot College Bergweg 4 0113-213010	Hr. A. Ruijgt 0113-343963
GRONINGEN Röling College Melisseweg 2 050-5474141	Hr. J. Tolboom 050-3129436
's-HERTOGENBOSCH Ds. Pierson College G. ter Borchlaan 1 073-6442929 *(NS Den Bosch-OOST)*	Hr. W.J.M. Laaper 040-2867720
ROTTERDAM Chr. College Henegouwen Henegouwerplein 16 010-4774533	Hr. C. Rijke 078-6194286
ZWOLLE Van der Capellen SG Lassuslaan 230 038-4225202	Hr. J.Th.J. Mahieu 038-450414

VWO-B dinsdag 27 mei 1997 van 18.30 - 20.30 uur

Plaats	*Gespreksleider*
AMERSFOORT De Amersfoortseberg Hugo de Grootlaan 25 033-4618845	Hr. W.A.M. van Bunnik 030-2517946
AMSTERDAM CSG Sweelinck College Moreelsestraat 21 020-6625697 *(tramlijn 5;16;24)*	Mw. G.W. Fokkens 020-6438447
ARNHEM Mozaïek College Thorbeckestraat 17 026-4423028	Mw. E.M.H. v.d. Berg-de Both 024-3551414
's-GRAVENHAGE Hofstad Lyceum Colijnplein 9 070-3687670	Hr. R.J. Klinkenberg 070-3559938
GRONINGEN Röling College Melisseweg 2 050-5474141	Mw. H. Lüder 050-5340695
's-HERTOGENBOSCH Ds. Pierson College G. ter Borchlaan 1 073-6442929 *(NS Den Bosch-OOST)*	Hr. A.L.P. van Merode 0162-313746
ROTTERDAM Chr. College Henegouwen Henegouwerplein 16 010-4774533	Hr. B.L.G.P. Hillebrand 0180-515210
ZWOLLE Van der Capellen SG Lassuslaan 230 038-4225202	Hr. A.T. Sterk 055-3666466

Vernieuwde Wiskunde-B in de profielen

Volgscholen in het Profi-project

Cor Hofstra

Inleiding

De vernieuwing van de tweede fase van het voorgezet onderwijs heeft ook voor ons mooie vak de nodige consequenties. Wie, wellicht met gezonde argwaan, de laatste versie van het nieuwe programma heeft bekeken weet dit. Er worden wiskunde-A onderwerpen toegevoegd aan de wiskunde-B programma's en vooral het wiskunde-B programma vwo krijgt te maken met nieuwe leerstofonderdelen. Misschien voor sommige collega's een reden eens te gaan denken aan flexibel uittreden, voor de meesten van ons mag het toch een uitdaging zijn interessante ontwikkelingen van nabij mee te maken en opnieuw vorm te geven. De voorbereidingen zijn in volle gang.
Op twee gebieden zullen we actief moeten zijn de komende jaren. De didactiek zal veranderen, van docerend naar coachend, en de leerstof wordt vernieuwd. Over de veranderde didactiek in het studiehuis met de nadruk op de zelfstandig lerende leerling lezen we al veel verhalen, van uiterst cynisch tot zeer verwachtingsvol. Er zijn collega's die twijfelen aan het vermogen van welke leerling dan ook, anderen zien de zelfstandige leerling als de oplossing van alle problemen. Gelukkig zijn de leraren, overigens al sinds mensenheugenis, eenduidig in hun conclusie dat de huidige situatie zodanig is, dat het zo niet langer kan, wat tot gevolg heeft dat men de vernieuwing niet zal schuwen.

Profi-project

Al weer bijna twee jaar draait nu het Profi-project, waarin scholen ervaring opdoen met zowel de nieuwe didactiek als de nieuwe leerstof. Het Freudenthal instituut verzorgt de vakinhoudelijke ondersteuning. In 1995 zijn twee scholen, het Cals College in Nieuwegein en het Liemers College in Zevenaar gestart met experimentele leerstofpakketjes, vooral in 5 vwo.
Deze zullen in 1997 voor het eerst een experimentele examen doen.
In 1996 zijn daar, in samenwerking tussen APS en Freudenthal instituut, nog eens tien volgscholen bijgekomen, die in 4 vwo zijn begonnen met pakketjes. Eenvoudig rekenwerk leert dat daar in 1999 de eerste experimentele examens Wiskunde-B zullen plaatsvinden.
Het APS heeft scholen gevraagd deel te nemen aan het experiment op een studiedag te Utrecht, waar al wat inzicht werd gegeven in de nieuwe leerstof. Er meldden zich tien scholen aan, redelijk gespreid over het land, van Rotterdam tot Stadskanaal. Deelnemen aan het experiment betekent organisatorisch dat de scholen 4 wekelijkse lesuren moeten hebben in klas 4 vwo. Verder moet er een deugdelijke jaarplanning worden gemaakt en moet er elke twee maanden een afgevaardigde van de school naar Utrecht reizen om op een dinsdagmiddag overleg te plegen met de projectleiders, de auteurs en de andere deelnemende scholen.

Wat bezielt een school

Wat bezielt een school deel te nemen aan een project, waarin de stof nog volop in ontwikkeling is? Allereerst is er natuurlijk nieuwsgierigheid die de belangstellenden naar Utrecht dreef. Daar konden de scholen worden overgehaald deel te nemen omdat er interessante ontwikkelingen werden geschetst. Ook de situatie op de eigen school speelt een belangrijke rol. Er moet voldoende vernieuwingsgezindheid zijn en men moet ook ruimte zien experimenteel bezig te zijn. Voor mijn school, de Delta te Leeuwarden, was een belangrijke overweging dat we mee konden praten over de interpretatie van de nieuwe inhoud en dat we de vinger aan de pols konden houden. Ook in het belang van de leerlingen leek het ons goed de ontwikkelingen te volgen zodat we niet onvoorbereid voor nare verrassingen zouden komen te staan. Wij willen er al min of meer boven staan op het moment dat het nieuwe examenprogramma in werking treedt. Het wiskundeonderwijs in het algemeen een dienst bewijzen is natuurlijk ook een prachtig doel dat wij nastreven.

Vakinhoud

Vakinhoudelijk betekent de invoering van de profielen voor het vak wiskunde nogal wat. We zullen nieuwe onderdelen gaan onderwijzen, zoals bijvoorbeeld discrete analyse, continue dynamische modellen en wachtrijen.... Daar-

4 Bestudeer goed het volgende voorbeeld. Hier moet speler *A* het getal 360 raden. Het verloop van het spel wordt goed duidelijk als je een getallenlijn erbij tekent zoals bij opgave 2.

lege scorelijst van speler A

512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

vraag	speler *A* vraagt	*B* antwoordt	*A* noteert	A berekent de nieuwe grens
1	is het getal tenminste 512 ?	nee	0	256
2	is het getal tenminste 256 ?	ja	1	256 + 128 = 384
3	is het getal tenminste 384 ?	nee	0	256 + 64 = 320
4	is het getal tenminste 320 ?	ja	1	320 + 32 = 352
5	is het getal tenminste 352 ?	ja	1	352 + 16 = 368
6	is het getal tenminste 368 ?	nee	0	352 + 8 = 360
7	is het getal tenminste 360 ?	ja	1	360 + 4 = 364
8	is het getal tenminste 364 ?	nee	0	360 + 2 = 362
9	is het getal tenminste 362 ?	nee	0	360 + 1 = 361
10	is het getal (tenminste) 361 ?	nee	0	360

ingevulde scorelijst van speler A

512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
0	1	0	1	1	0	1	0	0	0

Afbeelding 1

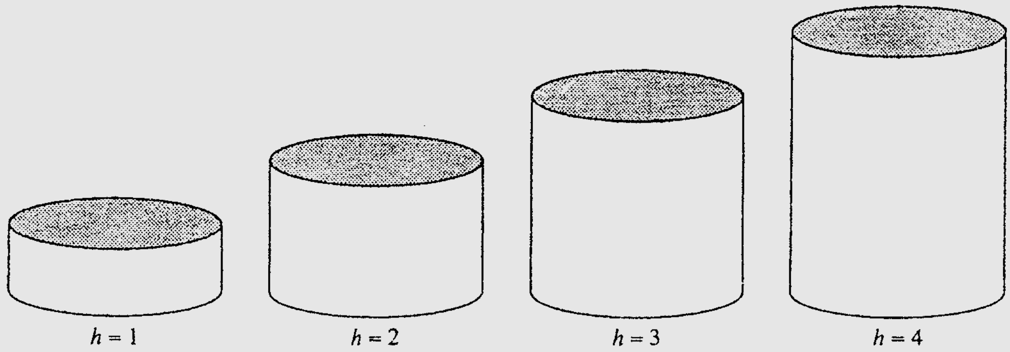
naast zal de inhoud van de traditionele onderwerpen worden bijgesteld. Elke leerling dient de beschikking te hebben over een Grafische Rekenmachine (GRM). Naast de GRM zullen de leerlingen ook overweg moeten kunnen met wiskundige toepassingen en softwarepakketten op de computer. De tien volgscholen ontvangen materiaal dat door het Freudenthalinstituut is ontwikkeld in de vorm van leerstofpakketjes.

Machtige functies

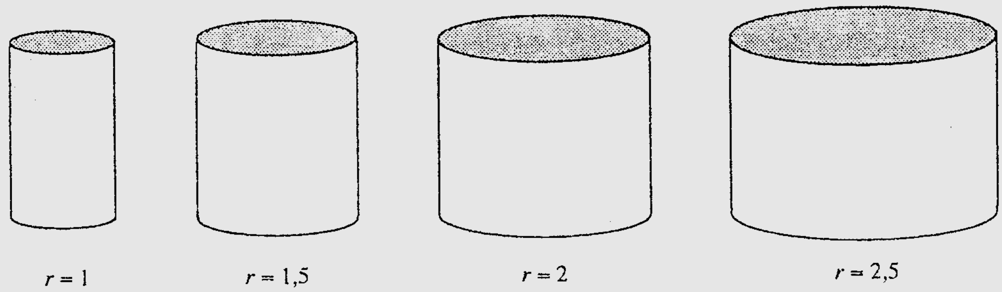
Het eerste pakket dat in klas 4 vwo is behandeld heet 'Machtige Functies'. Machten en exponenten spelen natuurlijk de hoofdrol in zo'n pakket dat begint met nog eens de binaire schrijfwijze van getallen van stal te halen, uitgaande van in het in de basisvorming geleerde inklemmen. Vervolgens gaat het via de familie van functies waarvan de formule te schrijven is als $y = x^n$ naar de evenredigheid van oppervlakte en inhoud van lichamen. De leerlingen krijgen het zwaar te verduren met deze stof. Het is de bedoeling dat de pakketjes zelfstandig door de leerlingen kunnen worden bestudeerd en doorgewerkt. Dit lijkt te ambitieus voor de eerste paragrafen. In het eerste hoofdstuk wordt door middel van een spelletje de binaire schrijfwijze van het getal 360 gevraagd. Hoewel het voorbeeld voor zich spreekt, blijken de leerlingen er niet veel van te snappen. Het is te gecompliceerd, wie de eerste vraag niet goed heeft gemaakt loopt helemaal vast (*afbeelding 1*).

Laten we hopen dat het hier gewenningsmoeilijkheden betreft, maar het lijkt alsof de gebruikte taal niet is afgestemd op de leerlingen die het moeten volgen. Daar komt nog eens bij dat er toch al grote problemen zijn met de kennis van leerlingen die zojuist de basisvorming hebben verlaten. In de loop van het eerste hoofdstuk wordt het nog wat erger. Vooral de onderwerpen waarin evenredigheid aan de orde komt zijn te hoog gegrepen voor onze leerlingen. Wanneer de leerlingen de volgende opgave krijgen voorgeschoteld laten zij het massaal afweten (*afbeelding 2*).

Er blijkt sprake van een structureel probleem, met kip en ei trekjes: Is het werk te moeilijk of zijn de leerlingen te dom? Tijdens de evaluatiebijeenkomsten die om de twee maanden met de volgscholen worden gehouden, wordt tot opluchting van alle deelnemende scholen



27 a. In de figuur hierboven hebben alle blikken dezelfde diameter.
Zoek uit of voor deze blikken de inhoud evenredig is met de hoogte h.



b. De blikken in deze tweede serie zijn allemaal even hoog.
Voor deze blikken is de inhoud *niet* evenredig met de diameter d.
Welke evenredigheid kun je wel geven?

c. Verklaar dat uit **a** en **b** volgt $\quad inhoud = c \cdot h \cdot d^2$

d. Hoe groot is de exacte waarde van de evenredigheidsconstante c?

Afbeelding 2

duidelijk dat de problemen vrijwel overal gelijk liggen. De stof is leuk, maar te moeilijk toegankelijk voor de leerlingen en het tempo kan bij lange na niet gehaald worden. De oorspronkelijke planning van de leerstof over het gehele jaar dient radicaal te worden bijgesteld, de planning voor het genoemde leerstofpakket krijgt de factor 2. Maar niet getreurd, het enthousiasme lijdt er nog niet onder, het auteursteam belooft beterschap, de karavaan trekt voort. Wel stralen de gezichten enige zorgelijkheid uit. Bij de volgende hoofdstukken blijft het bezwaar van het taalgebruik gehandhaafd, al blijkt dat er bij de leerlingen ook enige gewenning optreedt, ze krijgen door dat er van hen ook een behoorlijke inzet gevraagd wordt. Het werken met de GRM is voor de leerlingen geen enkel probleem en ze worden zo vaardig dat collega's van andere vakken achterdochtig kijken naar de mini-computer, waar wellicht ongewenste informatie op voor hen ontoegankelijke wijze is opgeslagen.

Regel van Horner

Wanneer in hoofdstuk 3 de regel van Horner wordt onderwezen, begrijpen de leerlingen weliswaar niet waar ze het voor doen, maar hebben ze aardigheid in het probleem. Met de regel van Horner ontbind je een veelterm op een bepaalde manier, waarbij haakjes worden geschreven en machten worden vermeden. Zo kun je $7x^3 + x^2 - 3x + 4$ schrijven als $x(x(7x + 1) - 3) + 4$. In het pakketje wordt er een prijs vastgeplakt aan elke bewerking. (*afbeelding 3*). De leerling moet de goedkoopste schrijfwijze vinden. De kinderen hadden hier aardigheid in en lieten zich niet van de wijs brengen door het antwoordenboekje. Zij zagen het juist als hun dure plicht het antwoordenboek te verslaan.
Na de afronding van het pakket 'Machtige functies' is nu het tweede pakketje met echt nieuwe inhoud aan de beurt, 'Discrete Analyse', dat zojuist is binnengekomen. Eén van de teksten handelt over de problemen in Albanië met het piramidespel. Actueel is het in ieder geval. In

17: De prijs van de algebra

In deze paragraaf kost algebra tijd, en dus geld. Een gedetailleerde prijslijst vind je hieronder.

Prijslijst:	
basisbewerkingen +, –, ×, :, /	1 punt per keer
kwadrateren	2 punten per keer
variabelen aanroepen	1 punt per keer
haakjes en gewone getallen	gratis

Als voorbeeld de prijs van $(2a + b)^2$:

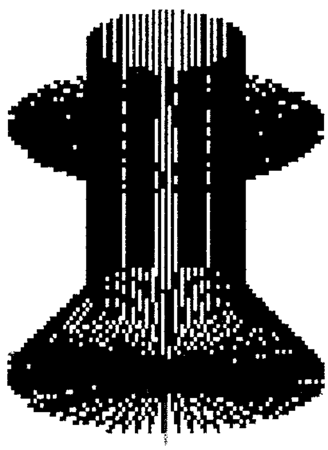
2	gewoon getal	gratis
a	aanroep variabele	1 punt
$2 \times a$	(verborgen) vermenigvuldiging	1 punt
b	aanroep	1 punt
$(2\times a) + (b)$	optellen	1 punt
$((2\times a) + (b))^2$	kwadrateren	2 punten
totaalprijs		6 punten

Afbeelding 3

de tussentijd werden de onderwerpen uit het boek behandeld, zoals groei, kansberekening en ruimtemeetkunde. Daarbij komt het goed uit dat in onze methode ‘Wiskunde Lijn’ ook aandacht bestaat voor het gebruik van de GRM, de leerstof sluit naadloos aan.

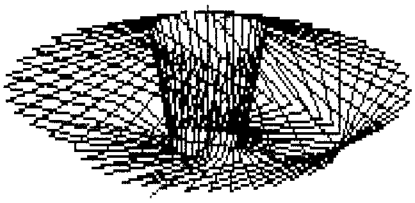
PRINT-opdrachten

Aan de volgscholen is ook gevraagd enkele opdrachten uit het PRINT-project door de leerlingen uit te laten voeren. Het PRINT-project staat onder supervisie van computeronderwijsgoeroe Sieb Kemme, die ons dan ook persoonlijk tijdens één van de vergaderingen de schijfjes overhandigde. Het experimenteren met de reguliere stof kost al erg veel tijd, zodat men snel geneigd is dan maar te bezuinigen op de zaken die er nog snel even tussendoor moeten. Wij besloten niet in die valkuil te stappen. Bij het onderwerp Ruimtemeetkunde dat uit het normale lesboek gegeven wordt hebben wij het onderwerp ‘Zelf een ruimtefiguur ontwerpen’ met de leerlingen gedaan. Met het oude programma Ruimfig moet een leerling een basisfiguur invoeren met ruimtelijke coördinaten en deze zodanig manipuleren dat er een artistieke vaas ontstaat. Dit bleek buitengewoon leuk te gaan. De leerlingen raakten spelenderwijs vertrouwd met de ruimtelijke coördinaten en kregen een vaas op het scherm. Artisticiteit blijkt door mij niet te meten, zodat ik mij in de beoordeling beperkt heb tot de virtuele stabiliteit en de toegankelijkheid voor bloemen. Alle leerlingen lukte het iets te maken en velen wisten iets aardigs te produceren, een hele prestatie.



Ten slotte

Met vallen en opstaan banen wij ons een weg door het nieuwe programma. De volgscholen zullen zich in april beraden of ze allemaal doorgaan. Dit hangt niet alleen af van de vertegenwoordigers van de scholen, het is een zaak van de hele sectie en van de schoolleiding. Ook het ministerie heeft natuurlijk een groot belang bij experimenten zoals deze, maar de scholen moeten het wel zelf betalen.



OPROEP voorzitter redactie

Omdat de huidige voorzitter van de redactie, Bert Zwaneveld, zijn voorzitterschap beëindigt, zoekt Euclides een nieuwe

voorzitter *(m/v)*

De taak van de redactievoorzitter bestaat uit:

- het voorzitten van de (kern)redactievergaderingen (6 × per jaar).
- het contact onderhouden met het bestuur van de Vereniging.
- de vertegenwoordiging van de redactie naar buiten.
- in de kernredactie het beleid van Euclides mee bepalen.
- het becommentariëren van kopij.

De geschatte tijdsbesteding is gemiddeld één dagdeel per week.

De redactie roept belangstellenden op zich voor 1 juni 1997 te melden bij de hoofdredacteur:

Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem
tel. 023 525 6735

Bij hem kan ook het redactiestatuut worden opgevraagd. In dit statuut staat onder andere de precieze taakomschrijving van de voorzitter van de redactie.

De nieuwe voorzitter wordt benoemd door het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op voordracht van een commissie waarin de hoofdredacteur, de eindredacteur en een vertegenwoordiging van het bestuur zitting hebben.

Masterclass Discrete Wiskunde Rijksuniversiteit Leiden

Op donderdag 29 mei en vrijdag 30 mei 1997 wordt aan de Rijksuniversiteit Leiden een masterclass georganiseerd voor leerlingen uit het vwo. Het onderwerp van deze masterclass is Discrete Wiskunde.
Op de eerste dag staan coderingstheorie en combinatoriek op het programma. Op de tweede dag besliskunde (handelsreizigersprobleem) en computer-algebra.
De masterclass laat op een prettige manier zien hoe het is om aan andere wiskunde dan schoolwiskunde te werken en stelt leerlingen in de gelegenheid te ervaren of een wiskundestudie iets voor hen is.
Eventueel kan ook één van beide dagen bezocht worden. Aan deelname zijn geen kosten verbonden. Programmaboekjes met aanmeldingsformulieren zijn aan te vragen bij mw. R. Derogee, tel 071-5277100. Aanmelden dient te geschieden voor 15 mei.

IN MEMORIAM

Piet van Wingerden

Op 10 februari jongstleden overleed op 68-jarige leeftijd het zeer gewaardeerde lid van de Didactiek- Commissie Piet van Wingerden. Een man met het hart op de goede plaats, een 'onderwijzer' in hart en nieren. Kortom een vriend die wij erg zullen missen.
De leden van de Vereniging kenden Piet vooral via zijn stukjes in Euclides, met name in de jaargangen 68/69 over 'Begrijpen' en de jaargangen 70/71 over 'Kunnen we door vragen leren?'
In zijn bijdragen schetste Piet niet alleen een beeld van stukjes goed onderwijs, maar maakte hij ook telkens weer duidelijk dat we steeds samen op zoek blijven naar verbeteringen van ons werk. Hij was er zich altijd zeer sterk bewust van dat hij anderen daarbij nodig had. Wij – zijn medecommissieleden – vonden hem wat dat betreft wel eens te bescheiden. Deze bescheidenheid weerhield hem er gelukkig niet van om ook na zijn pensionering te blijven werken voor het wiskundeonderwijs.
In essentie kwamen de idealen van Piet hierop neer:
We nemen denkbeelden over van mensen die we waarderen, we blijven zoeken en we blijven vertrouwen hebben in de jonge mensen, onze leerlingen.

Een drietal citaten uit Euclides mogen dit nogmaals duidelijk maken.

'Wat hierboven geschreven is, zijn ideeën van Jan Breeman. Maar luisterend naar een bevlogen mens onderga je diens invloed. Door die assimilatie kan er ondergronds wel wat van mijzelf zijn doorgesijpeld'
(*september 1990*).

'En nu weet ik nog steeds niet wat er in een mens verandert door het wiskunde-onderwijs. Toch denk ik dat een onderzoek daarnaar zou kunnen helpen bij het zoeken naar een antwoord op de vraag "Wat is begrijpen" '
(*mei 1992*).

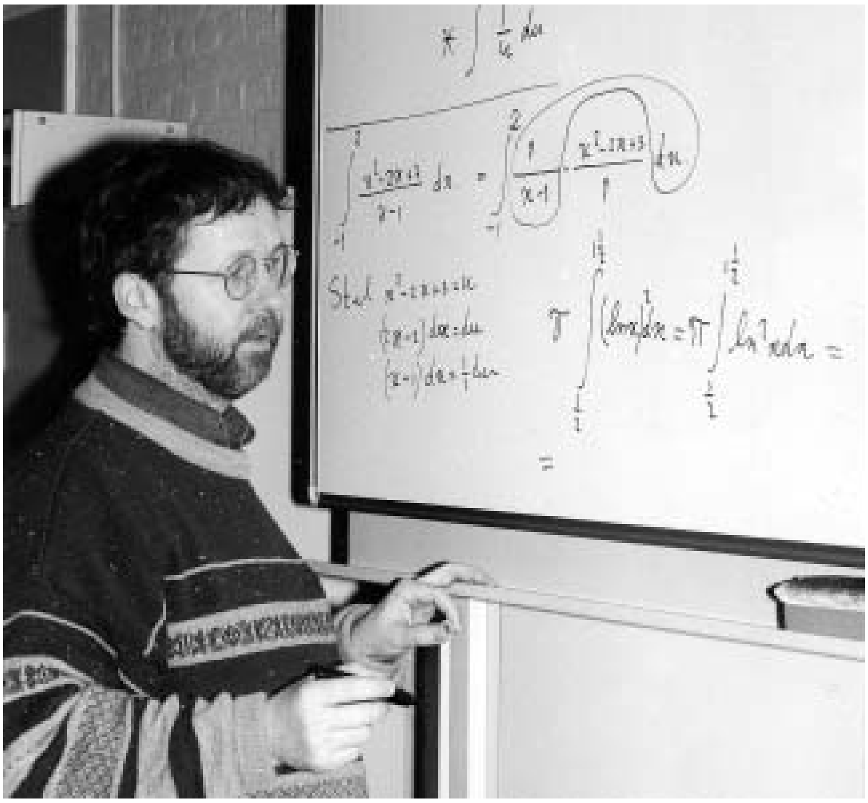
'De jonge mens weet immers iets, misschien onvolledig of ongeordend, soms anders dan wij. In ieder geval het navragen waard, lijkt mij'
(*september 1993*).

Navraag bij een van zijn oud-leerlingen leverde het volgende citaat op waarmee Piet als leraar en als mens bij velen in de herinnering zal blijven:
'Het gekke met hem was, dat we allemaal wisten dat hij geen orde kon houden, maar dat was ook niet nodig. Hij was gewoon een fijne leraar. Ik zou nu zeggen 'een goed mens'.

Harrie Broekman

INTERVIEW

'Leerlingen moeten zelf actief aan het werk'



Frans Schellekens, 41 jaar, is sinds 1977 werkzaam in het onderwijs. De eerste 12 jaar aan een mavo in Tilburg en daarna aan het Baronie van Breda College, een school voor dag/avondonderwijs aan volwassenen.
Naast het geven van wiskundelessen in de bovenbouw havo en vwo, houdt Frans zich bezig met het maken van de lesroosters voor alle afdelingen van de school.

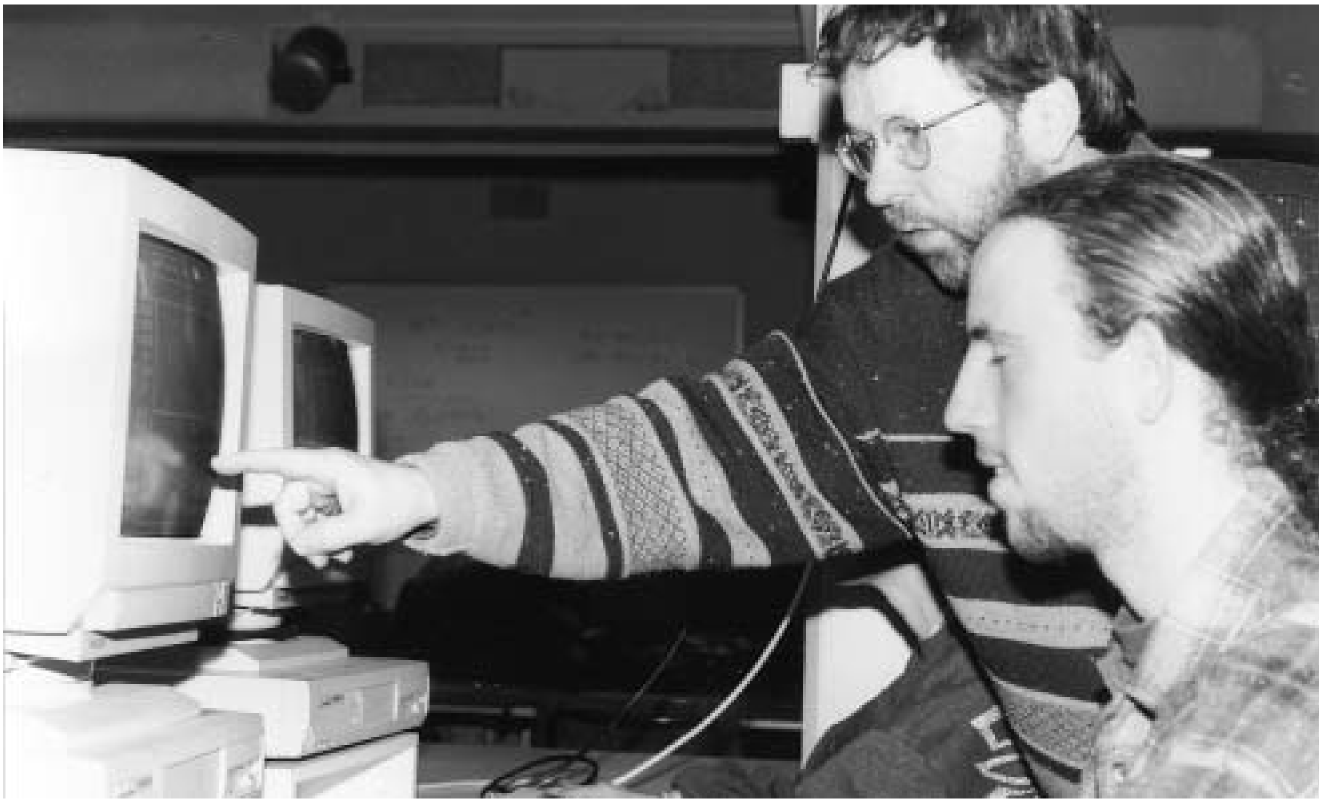
Je geeft onder andere versnelde cursussen. Ik neem aan dat je dan geen tijd hebt om buiten de stof iets te vertellen. Vind je dat een bezwaar?
Zo'n versnelde cursus houdt in dat de leerlingen de stof van 4/5 havo of 5/6 vwo in één jaar krijgen aangeboden. Dat ene jaar is dan ook nog het examenjaar, zodat je hooguit 25 weken zuivere lestijd hebt. Je begrijpt dat je dan als een razende door de leerstof moet. Leerlingen die aan deze cursus beginnen moeten natuurlijk al behoorlijk wat bagage bij zich hebben. Niet iedereen wordt zomaar tot deze cursus toegelaten, er zijn behoorlijke selectiecriteria. Feit blijft dat je inderdaad weinig tijd overhoudt om uit te weiden over bepaalde onderwerpen. De leerlingen die deze cursussen volgen zijn erg pragmatisch ingesteld, het enige doel dat zij voor ogen hebben is om op het eind van het jaar dat papiertje in hun bezit te hebben. Ons onderwijs wordt dan ook meer en meer vraaggestuurd dan aanbodgericht. Het lesgeven aan deze groepen biedt dus weinig wiskundige bevrediging. Daarnaast hebben we hier ook tweejarige opleidingen havo- en vwo-top en daar kun je binnen bepaalde grenzen wel dieper op de stof ingaan.

Jullie hebben op school geen onderbouw. In die onderbouw is de laatste jaren nogal wat veranderd. Hoe is het mogelijk je op de hoogte te houden van wat daar gebeurd?
De beste manier om er achter te komen wat de basisvorming inhoudt, is natuurlijk het zelf draaien van een onderbouwgroep. Dat is bij ons niet mogelijk want wij hebben zulke groepen niet. We volgen de ontwikkelingen middels het lezen van artikelen en dergelijke en vragen aan de praktijkmensen wat hun ervaringen zijn.

Jullie zijn gestart met een experiment tot flexibilisering van het onderwijs. Minder klassikaal les en meer zelfstudie onder begeleiding in heterogene groepen. Wat zijn de ervaringen tot nu toe?
Zoals je weet is het onderwijs sterk aan veranderingen onderhevig en mijn ervaring is dat dit bij het dag/avondonderwijs allemaal nog in een versnelling hoger gebeurt. Onze vavo-avondafdeling wordt, zoals de trend is in het hele land, geconfronteerd met teruglopende cursistenaantallen. Daarom hebben we één lesavond in de week gereserveerd voor bijvoorbeeld het vak wiskunde B.

Op deze avond zitten de niveaus 4 en 5 havo, 5 en 6 vwo en versneld havo/vwo bij elkaar. Er wordt gebruik gemaakt van twee lokalen. In het ene lokaal maken de leerlingen zelfstandig hun opgaven, met een stagiair als begeleider, in het andere lokaal wordt volgens een bepaald rooster elk uur aan een van de subgroepen instructie gegeven. Voor elke groep is er een duidelijke studiewijzer gemaakt waarin onder andere valt te lezen wat er elke week aan de orde komt, welke opgaven er moeten worden gemaakt en wat de cursist op het eind van de week moet kunnen en kennen. Na zes weken wordt de module afgerond met een toets. De ervaringen van dit jaar met deze groepen zijn goed. De cursisten vinden het prettig in hun eigen tempo te kunnen werken, ze maken dankbaar gebruik van de aanwezige deskundige begeleiding en het blijkt ze met weinig huiswerk de studiewijzer kunnen bijhouden. De leerlingen die 4/5 havo of 5/6 vwo in één jaar willen doen hebben vaak wel moeite met het hoge tempo. Op één avond wordt er zoveel nieuwe stof aan de orde gesteld dat men amper de tijd krijgt om het te laten bezinken. Ook voor mijzelf is het op zo'n avond hard werken. Omdat elke groep klassikaal aan de beurt moet komen, ben je de hele avond volop in de weer.

Het gebruik van de computer zal in de toekomst steeds belangrijker worden in het wiskundeonderwijs. hebben jullie mogelijkheden om de computer in te schakelen bij de lessen?



Wat betreft het aantal beschikbare computers mogen wij niet klagen. De daggroepen hebben naast hun lessen voor elk vak werkgroepen, begeleid door een vakdocent. In een open leercentrum krijgen de leerlingen volop de gelegenheid hun huiswerk te maken of om aan speciale opdrachten te werken (Tweede Fase!). In de ruimte die we daarvoor gebruiken zijn vele computers beschikbaar. We hebben al goede ervaringen opgedaan met programma's als Ruimtemeetkunde, Getal en Grafiek en Derive.

In de vernieuwde Tweede Fase komt er het Studiehuis. Hoe kijk je daar tegenaan?

Enerzijds merk ik in mijn lessen dat de manier van werken in de groep in de afgelopen jaren behoorlijk anders is geworden. Het frontaal lesgeven is steeds verder op de achtergrond geraakt. Leerlingen moeten zelf actief aan het werk. Je dient als docent wel het tempo te bewaken. Anderzijds denk ik dat het leveren van onderwijs op maat, zowel voor de cursist als voor de maatschappij een goede ontwikkeling is.

Rob Bosch

bespreking

J.A. van Maanen
Een complexe grootheid, leven en werk van Johann Bernoulli 1667 - 1748
Epsilon Uitgaven, Utrecht
ISBN 90-5041-040-5

Van 1695 tot 1705 was Johann Bernoulli als hoogleraar verbonden aan de Universiteit van Groningen. Om dat te gedenken is er in 1995 vanuit de vakgroep Wiskunde van de Rijksuniversiteit Groningen een tal van activiteiten georganiseerd. Een hiervan was het uitbrengen van het boek dat hier wordt besproken.
De auteur, als docent Geschiedenis van de Wiskunde verbonden aan de genoemde vakgroep, organiseerde in het cursusjaar 1991/1992 het seminarium ‘Johann Bernoulli en zijn tijd’. De door de deelnemers samengestelde teksten zijn door de auteur omgewerkt tot een doorlopend verhaal. Elk hoofdstuk behandelt een periode uit het leven van Bernoulli. Steeds wordt na een biografische inleiding verder ingegaan op de wiskundige onderwerpen waar Bernoulli zich in die periode mee heeft beziggehouden.
We geven een overzicht:
[1667 - 1685] Johann wordt geboren als tiende kind in het huwelijk van Nikolaus Bernoulli en Margaretha Schönauer. Zijn vader was handelaar in kruiden en specerijen en zag in Johann zijn opvolger. Zijn 13 jaar oudere broer Jakob wijdde Johann in in de wiskunde van zijn tijd. Op 18-jarige leeftijd was Johann evenver in de wiskunde als zijn leraar. Zeker zijn ze op de hoogte van wat we nu als voorlopers van de differentiaal-rekening kunnen beschouwen: de dubbelwortelmethode van Descartes en de regel van Hudde. In 1684 publiceert Leibniz zijn ‘Nieuwe methode voor maxima en minima alsook voor raaklijnen etc.’
[1685 - 1690] In deze periode proberen de broers de nieuwe methode van Leibniz te doorgronden. Ook Leibniz’ publicatie, waarin hij de integraalrekening introduceert, maken ze zich eigen. Ze lossen diverse problemen op, onder andere het probleem van de ‘kettinglijn’: welke vorm neemt een aan twee uiteinden opgehangen ketting aan? In dit hoofdstuk wordt verder aandacht besteed aan het leven en werk van Leibniz, in het bijzonder aan zijn ‘Nova Methodus’.
[1690 - 1692] Johann kan in Basel geen werk vinden op het terrein van de wiskunde. Hij gaat op reis en komt via Geneve en Lyon in Parijs aan. Daar ontmoet hij De l’Hospital, aan wie hij de nieuwe analyse onderwijst. Dit onderwijs is zo goed, dat De l’Hospital er een beroemd (leer-)boek over kon schrijven. Grote delen hiervan zijn nagenoeg identiek aan de aantekeningen van Bernoulli’s lessen. Dit hoofdstuk gaat verder in op de inhoud van Johanns aantekeningen. We leren hem kennen als iemand die meer geïnteresseerd is in de kracht van een methode dan in de theoretische fundering.
[1692 - 1695] Johann is terug in Basel alwaar hij stadsingenieur wordt. Na veel onderhandelingen aanvaardt hij een benoeming aan de universiteit van Groningen. In deze periode start de zeer uitvoerige correspondentie met Leibniz. Dit hoofdstuk behandelt verder uitgebreid het conflict dat Bernoulli heeft gehad met de Groningse theologen naar aanleiding van zijn opvatting dat ‘je niet hetzelfde lichaam hebt als een jaar geleden’.
[1695 - 1705] De jaren in Groningen, met als wiskundig hoogstandje de oplossing van het brachystochroon-probleem: welke vorm moet een glijbaan hebben opdat een massa onder invloed van zijn eigen gewicht in zo kort mogelijke tijd van punt A naar punt B beweegt? Johann daagt zijn collega’s uit dit probleem op te lossen. Er komen inderdaad oplossingen: Johann, Jakob, Leibniz en Newton. De oplossingen van Johann en van Newton worden in dit hoofdstuk beschreven. Johann verlaat Groningen om terug te keren naar Basel. Onderweg krijgt hij te horen dat zijn broer Jakob is overleden. Johann wordt Jakob’s opvolger.
[1705 - 1727] In Basel is het bed gespreid. Johann vervult daar een groot aantal ambten, zowel binnen de universiteit als daarbuiten. Vanuit het buitenland worden diverse pogingen ondernomen Bernoulli voor een hoogleraarspost te interesseren. Steeds bedankt hij, vaak na lange onderhandelingen. De rest van dit hoofdstuk is gewijd aan de conflicten die Johann Bernoulli in grote

aantallen heeft gehad met diverse mensen. Opmerkelijk is de relatie met zijn oudere broer Jakob. Aanvankelijk werken ze samen aan het toegankelijk maken van de nieuwe analyse. Maar al gauw probeert hij Jakob de loef af te steken en zichzelf in de schijnwerpers te plaatsen. Herhaaldelijk meldt hij dat zijn broer een probleem niet heeft kunnen oplossen, terwijl hijzelf in korte tijd de oplossing heeft gevonden. Ook het succes van zijn zoon Daniel viel bij vader Johann niet goed.
[1727 - 1748] Rond 1727 is er nieuwe generatie wiskundigen aangetreden: Nikolaus en Daniel Bernoulli en Johann's meest fameuze leerling: Leonhard Euler. Aan deze laatste wordt in dit hoofdstuk uitgebreid aandacht besteed, zowel aan zijn biografie als aan de wiskunde waarmee hij zich heeft beziggehouden. Hoofdstuk 8 (Kleine Bernoulli Encyclopedie) wijkt wat opzet betreft af van de andere hoofdstukken. Uitgaande van de stamboom wordt van diverse leden van de Bernoulli-familie beschreven welke onderwerpen men heeft bestudeerd en welke ontdekkingen naar hen zijn genoemd. Het boek wordt afgesloten met hoofdstukken waarin de noten zijn opgenomen en een bibliografie. Al met al een boek dat de persoon Johann Bernoulli, zijn werk en de positie van zijn persoon en zijn werk in de tijd duidelijk beschrijft. En dat in een zeer prettig leesbare vorm.

Harm Bakker

40 jaar geleden

Het eindexamen mechanica 1957

Naar aanleiding van de opgaven voor het schriftelijk eindexamen mechanica van de h.b.s.-B is het volgende schrijven door het Bestuur van Wimecos aan de inspectie verzonden.

Zeist, 4 juni 1957 Aan het College van Inspecteurs v/h VHMO

Hoogedelgestrenge Heren,
De ervaringen opgedaan bij het werk voor mechanica op het schriftelijk eindexamen van het h.b.s.-B, de opmerkingen die van verschillende zijden het bestuur van Wimecos hebben bereikt en de actie uitgegaan van een groep Haagse leraren ter verzachting van de aanbevolen rijksnormen, brengen het bestuur ertoe aan Uw College zijn mening over het desbetreffend examenwerk kenbaar te maken.
Het Bestuur is van oordeel, dat de hoeveelheid werk voor mechanica opgegeven zo groot is, dat de kandidaten geen voldoende tijd hebben gehad om zich in de gestelde problemen te verdiepen, zodat de betrouwbaarheid van de oplossingen als maatstaf voor kennis en inzicht van de kandidaten in het gedrang is gekomen.
Naar de mening van het Bestuur zou het de voorkeur hebben verdiend drie i.p.v. vier opgaven op te geven. Dat vele kandidaten wel in tijdnood hebben moeten verkeren, wordt waarschijnlijk gemaakt door de vorm waarin ze hun oplossingen hebben ingeleverd, maar ook door de omstandigheid dat vele leraren meer dan 50% van de beschikbare examentijd hebben nodig gehad om de volledige oplossing van alle opgaven te vinden, daarbij nog afgezien van een in het net schrijven van de gevonden oplossingen. Het Bestuur meent hierbij te mogen wijzen op de omstandigheid, dat de auteur van de oplossingen van de mechanica-vraagstukken in het 'Vaderland' er niet in is geslaagd van opgave IV een feilloze oplossing te geven, hoewel hem stellig meer tijd ter beschikking heeft gestaan dan de examen-kandidaten en hij in de gelegenheid is geweest ruggespraak te houden met zijn collega's.

Het bestuur dringt er daarom met klem bij Uw College op aan, te willen bevorderen dat in volgende jaren de omvang van het werk voor mechanica aanzienlijk wordt beperkt. Het lofwaardig streven van de samenstellers der mechanica-opgaven om zich niet uitsluitend met cliché-typen tevreden te stellen, dient ertoe te leiden de kandidaten zoveel tijd te geven dat ze rustig over de opgaven kunnen nadenken.

Uit: Euclides 32 (1956-1957)

Werkblad

Romeinse cijfers

1 Schrijf in Romeinse cijfers:

a 7	**c** 215	**e** 1032
b 14	**d** 712	**f** 3171

2 Schrijf in Arabische cijfers:

a XX I

b C $\begin{matrix}\text{XXX II}\\ \text{XXX III}\end{matrix}$

c CCC X I

d $\begin{matrix}\text{CC}\\ \text{CCC}\end{matrix}$ XX III

e MM CC XXX IIII

f MMM X $\begin{matrix}\text{IIII}\\ \text{IIII}\end{matrix}$

3 Schrijf in Romeinse cijfers en reken uit:

a 12 + 23
b 123 + 321
c 512 + 127
d 1024 + 97
e 21 + 75 + 134
f 68 + 131 + 14

4 Omdat de Romeinen hun cijfers vaak in steen moesten beitelen wilden ze zichzelf wat werk besparen door extra tekens te bedenken. In plaats van $\begin{matrix}\text{II}\\ \text{III}\end{matrix}$ gebruikten ze daarom ook wel het teken V. Dus IIII + I = V (= $\begin{matrix}\text{II}\\ \text{III}\end{matrix}$). Dat betekende dat $\begin{matrix}\text{III}\\ \text{IIII}\end{matrix}$ veel korter geschreven kon worden als VII. Op dezelfde manier bedachten ze het teken L voor 50 en het teken D in plaats van 5 C's.

a Maak de volgende sommen:
 1 VI + II
 2 XXV + V
 3 LXXVII + XXIII
b Bedenk zelf nog een aantal sommen waarin V, L en D voorkomt.
c Welke nieuwe 'rekenregels' moet je leren als je ook gebruik maakt van V, L, enzovoort?

Werkblad

5 In de middeleeuwen bedachten mensen dat het nog korter kon. In plaats van IIII schreven zij IV: de I vóór de V betekende dat die I van de V moest worden afgehaald. Dus VI betekende 6 omdat de I achter de V stond. Op dezelfde manier schreef men IX voor $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{IIII}}{\text{IIIII}}$ (of VIIII). Verder blijft alles hetzelfde: dus XX IV is 24 en M CC IX is 1209. De plaats van de tekens maakt nu dus verschil.

a Maak de volgende sommen:

1 IX + X
2 XXIV + XIX
3 XC + X
4 XXIX + XCIV
5 XCIV + XIXVI
6 MXCCLIV + CVIII

b Bedenk zelf nog een aantal sommen waarin IV, XC enzovoort voorkomt.
c Welke nieuwe 'rekenregels' moet je leren wanneer je gebruik maakt van IV, XC, enzovoort?

6 Schrijf in Romeinse cijfers en reken uit. Doe dit op twee manieren: door gewoon verdubbelen en samenvoegen, en door een handige vermenigvuldiging met X, C of M te gebruiken.

a 12×45
b 27×116
c 4×1036
d 13×17
e 45×12
f 31×105

7 Maak zelf een werkblad waarmee je iemand uitlegt hoe hij moet vermenigvuldigen door verdubbelen. Gebruik in de voorbeelden ook getallen als V, L, D en samenstellingen als IV, IX, XC, enzovoort.

Deze werkbladen horen bij het artikel
'**Historia Magistra Vitae**' van *D.J. Beckers* op bladzijde 259.

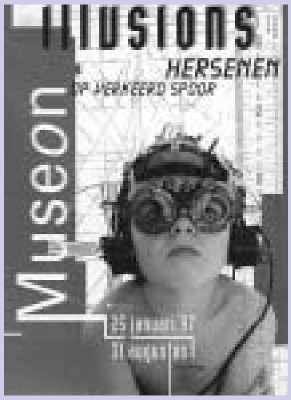
Recreatie

Opgave 678

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A,
2563 EB Den Haag

Is een computer te bedienen met hersengolven? Hoe actief is een mens in zijn slaap ? Hoe werken onze zintuigen en hersenen ? Dat zijn enkele van de vele vragen waar de bezoekers mee geconfronteerd worden op de spectaculaire interactieve tentoonstelling ‘Illusions’ die van 25 januari tot en met 31 augustus 1997 in het Museon in Den Haag te zien is.

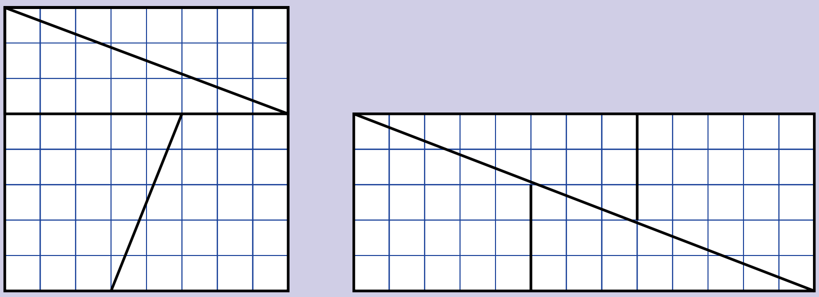


Enkele opstellingen in de tentoonstelling:

- Hersengolven bedienen een computer;
- Slaapexperiment in het Museon;
- Verwrongen beelden;
- Homunculus;
- Spiegeldoolhof;
- De scheve tegelmuur.

Daarnaast een aantal mappen met optisch en wiskundig gezichtsbedrog. Aanbevolen !

Bekend is waarschijnlijk de paradox van het 8 bij 8 vierkant, dat in vier stukken wordt verknipt. Door de stukken anders neer te leggen bedekken ze een 5 bij 13 rechthoek. Op de Nationale Wiskunde Dagen werd deze paradox bij twee lezingen genoemd.



Veel minder bekend is het feit dat de vier puzzelstukjes ook een oppervlakte van 63 vierkantjes kunnen bedekken. Daarbij de stukjes natuurlijk niet over elkaar heen leggen !

Als opgave deze maand een verklaring van de genoemde paradox en de figuur met 63 vierkantjes.

Als u binnen een maand de oplossing instuurt, dan verdient u maximaal 5 punten voor de doorlopende ladderwedstrijd. De punten blijven in mijn computer staan, dus ook als u al lang niet meer hebt ingezonden, dan worden uw behaalde punten opgeteld bij de vorige stand. Na verloop van tijd heeft u het meeste aantal punten en verdient u de ladderprijs, een boekenbon van ƒ 25,–.

Oplossing 675

Gevraagd een getal op de puntjes te plaatsen zodat
71 × …… = 1……7
Als het gevraagde getal x uit n cijfers bestaat, dan geldt in ons tientallig stelsel:

$$71x = 10^{n+1} + 10x + 7$$
$$61x = 10^{n+1} + 7$$
$$x = \frac{10^{n+1} + 7}{61}$$

Na enig rekenwerk vinden we dat $n = 52$ cijfers en dat de algemene oplossing

$$x = \frac{10^{53+60k} + 7}{61} \text{ is, waarbij } k \in \mathbb{N}$$

Uitgeschreven wordt dan de kleinste x:
1639344262295081967213114754098360655737704918032787

Jan Wilhelm (5 punten), Zeist vond deze x met zijn TI-81:

```
Prgmn titel
:100 → G
:0 → R
:Lbl A
:If R=42
:Goto B
:G/61 → Z
:Int Z → Y
:Disp Y
:Pause
:G-61*Y → R
:10*R → G
:Goto A
:Lbl B
:427/61 → L
:Disp "LAATSTE CIJFER"
:Disp L
:End
```

Velen merkten op dat in de opgave het getal behorende bij 83 korter kan: 83 × 41096 = 3410968.
Dat alleen de getallen 71, 83 en 86 deze eigenschap bezitten staat beschreven in het boek ‘Ingenious Mathematical Problems and Methods’ van L.A. Graham. (Problem 16).

Met 68 punten is winnaar van een boekenbon van ƒ 25,–:

Dick Buijs
Lutterveldsestraat 14
4012 DE Kerk-Avezaath

Hartelijk gefeliciteerd!



KALENDER

Euclides verschijnt dit schooljaar nog op 15 juni. In de nieuwe jaargang verschijnen de nummers rond 1 september, 15 oktober en 1 december.

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Data melden bij de hoofdredacteur uiterlijk zes weken voor de verschijningsdatum. Dit kan ook via e-mail: cph@xs4all.nl

---

Examenbesprekingen
di. 20 mei 16.00-18.00
vbo-B
wo. 21 mei 15.00-18.00
vbo/mavo C/D
wo. 21 mei 16.00-18.00
havo-A
wo. 21 mei 18.30-20.30
vwo-A
di. 27 mei 16.00-18.00
havo-B
di. 27 mei 18.30-20.30
vwo-B
Voor lokaties, zie blz. 275 e.v.

Masterclass voor 5 en 6 vwo
do. 29 en vr. 30 mei 1997
RUL: 071 - 5277100/04
Masterclass over onderwerpen uit de discrete wiskunde.
Zie aankondiging blz. 283

Historische Kring Reken- en WiskundeOnderwijs Symposium: Rekenhulpmiddelen in het onderwijs
za. 31 mei 1997
Fi: 030 2611611
Zie aankondiging blz. 247

Lezingenserie Hogeschool van Utrecht
wo. 18 juni 1997: 20.00
HvU: 030 - 2547230
dr. Marjolijn Witte: Het geslacht van de wiskunde-knobbel.

Data in het nieuwe schooljaar
Wil iedereen die al data voor interessante bijeenkomsten heeft vastgelegd in het nieuwe schooljaar, deze zo snel mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur.
Adres: zie colofon
e-mail: cph@xs4all.nl

Vierkant Wiskunde-kampen
4 t/m 8 augustus 1997: groep 7/8 basisschool.
4 t/m 8 augustus 1997: 12-14 jaar (herhaling 1996).
11 t/m 15 augustus 1997: 13-16 jaar (nieuw progr.).
VU: 020 - 4447776
Aankondiging volgt later.

Voorronde Wiskunde A-lympiade
vr. 28 november 1997
Fi: 030 - 2611611
Aankondiging volg later.

Mathematische Modelleercompetitie
vwo 4, 5 en 6.
za. 31 januari 1998
Maastricht
Aankondiging volgt later.

Nationale Wiskunde Dagen
vr. 6 februari/za. 7 februari 1998
Freudenthal instituut: 030 2611 611
Aankondiging volgt later

Internetsites voor wiskundedocenten:

E-LAN, eerste landelijke collegiale docentennetwerk op internet.
www.bve.nl/tc/

Maar voor wiskunde hebben we zoiets al, namelijk de WiskundE-brief. Uitwisselen via e-mail van ervaringen, voornamelijk rond de Tweede Fase.
Aanmelden gaat via de Digitale School (*digischool.bart.nl*) of via een e-mail aan Gerard Koolstra (*GerardK@xs4all.nl*)

Scholen met home-pages op internet:
digischool.bart.nl/wwwvoal.htm

Voorjaar 1998
verschijnen

de nieuwe edities van
Moderne wiskunde
en
Netwerk

- **Herziening basisvorming**

Gereed in het voorjaar van 1998:

- 4 nieuwe delen voor leerjaar 1:
  (i)vbo, vbo-mavo, mavo-havo(vwo) en havo-vwo

- **Tweede fase havo-vwo**

Gereed in het voorjaar van 1998:

- 2 delen voor vwo-gemeenschappelijk
- 5 delen voor havo-profielen

Na de zomervakantie
hoort u meer van ons...

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11

Ook verkrijgbaar
via de boekhandel

Wolters Noordhoff

420/7136